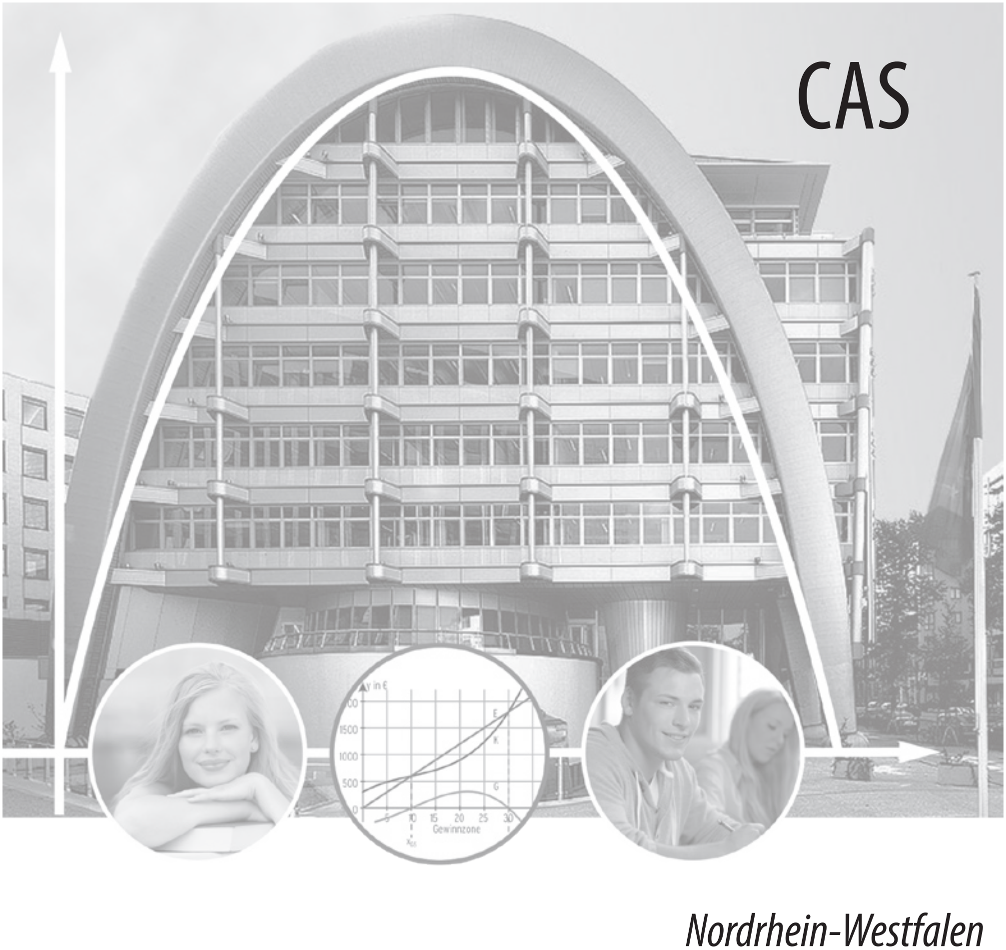
Ott
Lengersdorf

Abitur 2026 | *Leistungskurs*

Aufgabensammlung zur zentralen Abiturprüfung
Mathematik am Berufskolleg – Berufliches Gymnasium
– Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung –

CAS



Nordrhein-Westfalen

Merkur
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis
Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Roland Ott
Oberstudienrat

Norbert Lengersdorf

Oberstudienrat am Berufskolleg für Wirtschaft und Verwaltung in Herzogenrath

* * * * *

18. Auflage 2025

Gesamtherstellung:
MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln
E-Mail: info@merkur-verlag.de
lehrer-service@merkur-verlag.de
Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr. 0447-18
ISBN 978-3-8120-1183-9

Vorwort

Die vorliegende Aufgabensammlung enthält nur auf die neue Prüfungsordnung für das Berufskolleg in Nordrhein-Westfalen abgestimmte Aufgaben zur Vorbereitung auf das Abitur 2026 im Fach Mathematik an beruflichen Gymnasien im Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung.

Die Aufgaben behandeln nur Themen, die in den Abiturvorgaben 2026 für den Leis-tungs-kurs Mathematik, Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung, aufgeführt sind.

Die zentrale Abiturprüfung 2026 besteht aus zwei Teilen, einem hilfsmittelfreien Prüfungsteil A und einem Prüfungsteil B mit Hilfsmittel (MMS bzw. CAS)

Die Aufgaben für den Leistungskurs sind gegliedert nach den Prüfungsgebieten: Analysis mit Anwendungen, Stochastik und Lineare Algebra/Analytische Geometrie.

Durch die Vorgaben für die schriftliche Abiturprüfung 2026 werden inhaltliche Schwerpunkte festgelegt.

Die **Analysis** behandelt im Abitur 2026 als Schwerpunkt ganzrationale Funktionen und Exponentialfunktionen und die Modellierung von berufsbezogenen Anwendungen mithilfe dieser Funktionstypen: Marktpreistheorie, Modelle der vollständigen Konkurrenz und des Monopols, Absatz- und Umsatzentwicklung, Kosten- und Gewinnanalyse.

Die **Lineare Algebra** hat die Schwerpunkte Lineare Gleichungssysteme und **Lineare Optimierungsprobleme**. Mehrstufige Produktionsprozesse und stochastische Prozesse werden als Anwendungen behandelt.

Schwerpunkte in der **Stochastik** sind die bedingte Wahrscheinlichkeit, die Binomialverteilung, der einseitige Hypothesentest und ökonomische Anwendungen wie die Preiskalkulation.

Die Einteilung nach Prüfungsgebieten ermöglicht ein gezieltes Üben.

Da die Aufgabensammlung allen Schüler/innen bei der Vorbereitung auf das schriftliche Abitur helfen soll, sind zu allen Aufgaben ausführliche Lösungen angegeben. An verschiedenen Stellen sind Lösungsalternativen aufgezeigt, ohne einen Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben.

Autoren und Verlag wünschen viel Glück und Erfolg bei der Abiturprüfung.

Inhaltsverzeichnis

Ablauf der schriftlichen Abiturprüfung 2026

Leistungskurs

Die schriftliche Abiturprüfung umfasst den Aufgabenteil A (Bearbeitung ohne Hilfsmittel) und den Aufgabenteil B (Bearbeitung mit Hilfsmitteln).
Der Aufgabenteil A besteht aus **vier Pflichtaufgaben** und **vier Wahlaufgaben**, aus denen zwei von den Prüflingen ausgewählt werden.
Die Auswahlentscheidung wird dokumentiert, die beiden angekreuzten Wahlaufgaben werden bewertet.
Der Aufgabenteil B besteht aus drei Pflichtaufgaben.
Bei mindestens zwei der Aufgaben des Aufgabenteils A und B sind Anwendungsbezüge aus Wirtschaft und Verwaltung vorgesehen.

Aufgabenteil A Bearbeitung ohne Hilfsmittel				**Aufgabenteil B Bearbeitung mit Hilfsmittel**	
Pflichtaufgaben		Wahlaufgaben (zwei aus vier, beliebig)		Pflichtaufgaben	
Analysis	5	Analysis	5	Analysis	30
Analysis	5	Analysis	5	Stochastik	30
Stochastik	5	Stochastik	5	Analytische Geometrie/ Lineare Algebra	30
Analytische Geometrie/ Lineare Algebra	5	Analytische Geometrie/ Lineare Algebra	5		
Summe	20	Summe	10	Summe	90
Gesamtsumme: 120 BE + 5 BE (Darstellungsleistung) = **125 BE**					

Mindestens zwei der Teilaufgaben sind mit Anwendungsbezug.

Organisation

Zu Beginn der Bearbeitungszeit erhalten die Prüflinge die beiden zu bearbeitenden Aufgabenteile A und B. Die zugelassenen Hilfsmittel (MMS (CAS); Formelsammlung) werden noch nicht ausgegeben.

Die Prüflinge geben individuell nach Bearbeitung ihre Ausarbeitungen zum Aufgabenteil A ab und erhalten im Gegenzug Zugang zu den zugelassenen Hilfsmitteln (MMS; Formelsammlung).

Die Arbeitszeit einschließlich Auswahlzeit beträgt 300 Minuten

Für Prüflinge, die die Aufgaben und die Lösungen des Prüfungsteils A vorzeitig abgeben, verlängert sich entsprechend die Bearbeitungszeit für den Prüfungsteil B.

Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist in beiden Prüfungsteilen der Klausur zugelassen.

Operatoren und Dokumentation von Lösungen

1 Allgemeine Bemerkungen zu den Aufgabenstellungen

Der Prüfling wird nicht zur Nutzung einer bestimmten Technologie aufgefordert, da das Erkennen der Sinnhaftigkeit des Einsatzes des MMS eine selbstständige Leistung ist. Die Vorgehensweise und Darstellung der Lösung muss unabhängig von der gewählten Technik nachvollziehbar dokumentiert werden. Der Schüler hat zu verdeutlichen, wie er mit welchen Eingaben mit der genutzten Technik zu welchen Ergebnissen gelangt ist. Die Dokumentation erfolgt immer mit mathematischen Regeln unter Nutzung der Fachsprache.

2 Beispiele zu einigen der häufig genutzten Operatoren

2.1

Operator	AFB	Beschreibung
Angeben, Nennen	I, II	Objekte, Sachverhalte, Begriffe, Daten ohne nähere Erläuterungen bzw. Begründungen und ohne Darstellung von Lösungsansätzen oder Lösungswegen aufzählen

Erläuterungen: Der Prozess der Ergebnisermittlung bleibt gegebenenfalls im Dunkeln, somit auch die Wahl des Hilfsmittels. „Angeben /Nennen" erfordert keine Einsicht in den Sachzusammenhang oder den mathematischen Zusammenhang.

Beispiel: ...und geben Sie eine mögliche Kostenfunktion an.

(Abitur 2017 LK CAS, Analysis 2.1.3)

Erwartungshorizont:

Kostenfunktion z.B. mit c = 12: $K(x) = \frac{1}{400}x^3 - \frac{1}{15}x^2 + 12x + 200$

2.2

Operator	AFB	Beschreibung
Erläutern	I, II	Die Erläuterung liefert Informationen, mithilfe derer sich z. B. das Zustandekommen einer grafischen Darstellung oder ein mathematisches Vorgehen nachvollziehen lassen.

Erläuterungen: Beispielsweise kann zur Problemlösung ein Sachzusammenhang durch zusätzlich hergeleitete Informationen mit eigenen Worten dargelegt werden oder aber auch ein Vorgehen verständlich beschrieben werden.

Beispiel:

Erläutern Sie anhand der kurzfristigen und der langfristigen Preisuntergrenze, ob die Rasolux GmbH einen Preis von 700GE/ME unterbieten kann.

(Abitur 2017 GK Analysis 2.2.1)

Erwartungshorizont:

kPUG: Minimierung der variablen Stückkosten $k_v(x) = 10x^2 - 240x + 1920$

Notwendige und hinreichende Bedingung bei quadratischen Funktionen mit positivem Leitkoeffizient: $k'_v(x) = 0$ $\quad 20x - 240 = 0 \Leftrightarrow x = 12$ $\quad$ kPUG: $k_v(12) = 480$ (GE/ME)

LPUG: Minimierung der Stückkosten $k(x) = 10x^2 - 240x + 1920 + \frac{7840}{x}$

Darstellung des Graphen im Intervall von 0 bis 20 liefert den Tiefpunkt (14 | 1080)

LPUG 1080 GE/ME. Ein Preis von 700GE/ME kann kurzfristig, aber nicht langfristig unterschritten werden.

2.3

Operator	AFB	Beschreibung
Berechnen	I, II	Die Berechnung ist ausgehend von einem Ansatz darzustellen.

Erläuterungen: Der Ansatz, der auf der symbolischen Ebenen zur Lösung führt, ist zu dokumentieren. Der sich anschließende Lösungsweg muss unter Beibehaltung mathematischer Regeln nachvollziehbar dargestellt werden. Wenn ein MMS (CAS) für einen Lösungsschritt verwendet wird, ist der Ansatz und der logische Schritt zu dokumentieren.

Beispiel: Berechnen Sie den maximalen Gewinn (Abitur 2017 LK, Analysis 2.2.1.2)

Erwartungshorizont

Gewinnmaximum: $G'(x) = 0$ und $G''(x) < 0$

Ableitungen: $G'(x) = -3x^2 + 12x - 1{,}25$; $G''(x) = -6x + 12$

Notwendige Bedingung: $G'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 3{,}89 \vee x_2 = 0{,}11$

Mit $G''(3{,}89) < 0$ und $G(3{,}89) = 23{,}32$ gilt:

Bei einer Produktion von 3,89 ME wird der maximale Gewinn von 23,32 GE erzielt.

2.4

Operator	AFB	Beschreibung
Bestimmen, Ermitteln	I, II	Die Art des Vorgehens kann frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.

Erläuterungen: Die Wahl der Mittel (z.B. ob graphisch oder numerisch) bleibt offen. Durch Spezifizierung wie „Ermitteln Sie graphisch" oder „Bestimmen Sie rechnerisch" würde die Verwendung der Werkzeugebene des CAS beschränkt.
Beim graphischen ermitteln von Lösungen kann dies durch Anfertigung einer Zeichnung auf Papier oder durch Darlegung der Lösungsschritte beim graphischen Lösen mit MMS (CAS) erfolgen.

Beispiel: Gehen Sie davon aus, dass gilt: $a = \frac{1}{225}c - \frac{23}{450}$ und $b = -30a$
Ermitteln Sie den Bereich, in dem der Parameter c liegen muss, damit K eine ertragsgesetzliche Kostenfunktion ist … . (Abitur 2017 LK, Analysis 2.1.3)

Erwartungshorizont

Mit $b^2 \leq 3 \cdot a \cdot c$ ist folgende Ungleichung zu lösen: $(\frac{23}{15} - \frac{2}{15}c)^2 \leq 3(\frac{1}{225}c - \frac{23}{450}) \cdot c$

Lösung mit CAS: $11{,}5 \leq c \leq 46$

Operator	AFB	Erläuterung
angeben, nennen	I, II	Für die Angabe bzw. Nennung ist keine Begründung erforderlich
begründen, nachweisen, zeigen	II, III	Sachverhalte, Aussagen sind durch logisches Schließen zu bestätigen Die Art des Vorgehens ist frei wählbar, das Verfahren ist darzustellen. zu nutzen
berechnen	I, II	Ergebnisse von einem Ansatz ausgehend durch Rechenoperationen gewinnen
beschreiben	I, II	Strukturen, Sachverhalte, Verfahren unter Verwendung der Fachsprache angemessen wiedergeben, eine Begründung ist nicht notwendig.
bestimmen, ermitteln	I, II	Zusammenhänge bzw. Lösungswege finden und die Ergebnisse formulieren
beurteilen	II, III	Das zu fällende Urteil ist zu begründen
bewerten, deuten interpretieren	II, III	Die Deutung bzw. Interpretation stellt einen Zusammenhang her z. B. zwischen einer grafischen Darstellung, einem Term oder dem Ergebnis einer Rechnung und einem vorgegebenen Sachzusammenhang.
entscheiden	II, III	Sich bei Alternativen eindeutig und begründet auf eine Möglichkeit festlegen.
erläutern	I, II	Strukturen und Zusammenhänge erfassen, in Einzelheiten verdeutlichen und durch zusätzliche Informationen verständlich machen
herleiten, formulieren	II, III	Eine Formel oder einen Zusammenhang aus bekannten Sachverhalten nachvollziehbar entwickeln
skizzieren	I, II	Die Skizze ist so anzufertigen, dass sie wesentliche Eigenschaften von Sachverhalten oder Objekten beschreibt
untersuchen	I, II	Sachverhalte, Probleme, Fragestellungen nach bestimmten, fachlich üblichen bzw. sinnvollen Kriterien bearbeiten
veranschaulichen, verdeutlichen	I, II	Einen Sachverhalt mit verbalen oder graphischen Erläuterungen versehen
vergleichen	I, II	Gemeinsamkeiten, Ähnlichkeiten und Unterschiede ermitteln
zeichnen, grafisch darstellen	I, II	hinreichend exakte graphische Darstellungen von Objekten oder Daten anfertigen

Die Verwendung eines Operators, der in der Übersicht nicht genannt wird, ist möglich, wenn aufgrund der standardsprachlichen Bedeutung dieses Operators in Verbindung mit der Aufgabenstellung davon auszugehen ist, dass die jeweilige Aufgabe im Sinne der Aufgabenstellung bearbeitet werden kann. Grundsätzlich können sich alle Operatoren auf alle drei Anforderungsbereiche beziehen.
Die Operatoren können durch **Zusätze** (z. B. „rechnerisch“ oder „grafisch“) konkretisiert werden. Zugelassene Hilfsmittel dürfen zur Bearbeitung verwendet werden, sofern dem kein entsprechender Zusatz entgegensteht. Speziell kann bei der Verfügbarkeit von digitalen Mathematikwerkzeugen im Einzelfall die Darstellung eines Lösungswegs gefordert werden, der auch ohne den Einsatz dieser Technologien nachvollziehbar ist.

I Hilfsmittelfreier Teil A der zentralen Abiturprüfung

Aufgaben zur Analysis

Dieser Teil A der Abiturprüfung enthält 4 Pflichtaufgaben und 4 Wahlaufgaben. Von den Wahlaufgaben sind zwei Aufgaben zu wählen.

Punkte

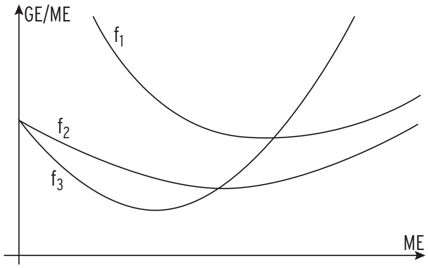
Aufgabe 1 **Lösungen Seite 17**

Zur ertragsgesetzlichen Kostenfunktion

$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $a, c, d > 0$, $b < 0$,

x in ME, K(x) in GE,

sind in der nebenstehenden Abbildung die Graphen der Grenzkostenfunktion, der Stückkostenfunktion und der variablen Stückkostenfunktion dargestellt.

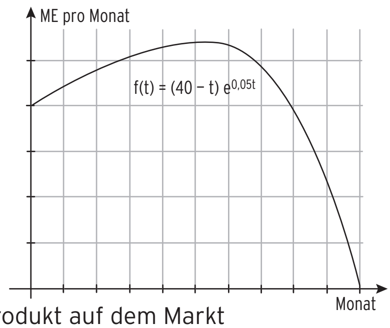


1.1 Ordnen Sie dem jeweiligen Graphen die entsprechende ökonomische Funktion begründet zu. 3

1.2 Beweisen Sie, dass die betriebsminimale Ausbringungsmenge bei $x = -\frac{b}{2a}$ liegt. 2

Aufgabe 2

Die monatlichen Absatzzahlen eines Produkts werden mit $f(t) = (40 - t)e^{0,05t}$, (t in Monaten, f(t) in ME/Monat) modelliert. Der nebenstehende Graph verdeutlicht die Situation.



2.1 Berechnen Sie den Zeitpunkt, bis zu dem das Produkt auf dem Markt abgesetzt werden kann. 2

2.2 Zeigen Sie, dass der Zeitpunkt des maximalen monatlichen Absatzes bei $t = 20$ liegt. 3

($f''(t) = -\frac{1}{400}\, t\, e^{0,05t}$ kann verwendet werden.)

Aufgaben zur Analysis

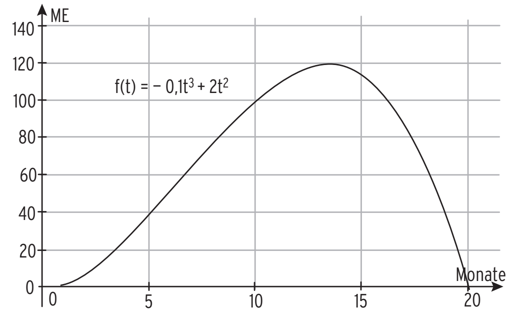
Aufgabe 3 **Lösungen Seite 18** **Punkt**

Die monatlichen Absatzzahlen eines neuartigen Produkts werden mit

$f(t) = -\frac{1}{10}t^3 + 2t^2$

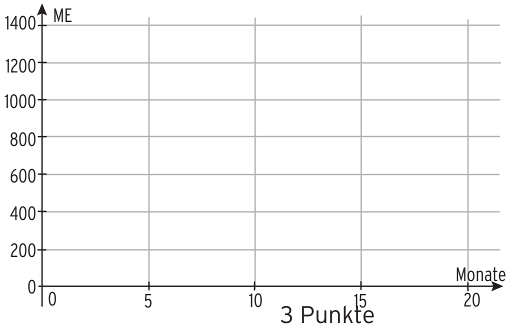
(t in Monaten, f(t) in ME/Monat)

modelliert. Der nebenstehende Graph verdeutlicht die Situation.



3.1 Bestimmen Sie die in den ersten 20 Monaten insgesamt abgesetzte Menge. 2 Punkte

3.2 Skizzieren Sie in das nebenstehende Koordinatensystem den Graphen der Funktion, die den Gesamtabsatz in Abhängigkeit von der Zeit angibt.



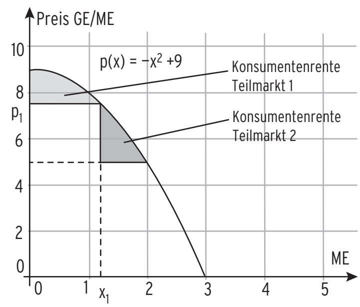
3 Punkte

Aufgabe 4

Die Preisentwicklung eines Produkts entspricht der Nachfragefunktion p mit

$p(x) = -x^2 + 9$; x in ME, p(x) in GE/ME.

Das Produkt wird auf dem Teilmarkt 1 für p_1 GE/ME und auf dem Teilmarkt 2 für 5 GE/ME verkauft. Es werden insgesamt 2 ME abgesetzt (vgl. nebenstehende Abbildung).



4.1 Beschreiben Sie den Einfluss der Höhe des Preises p_1 auf die Konsumentenrente des jeweiligen Teilmarkts. 2

4.2 Weisen Sie nach, dass die gesamte Konsumentenrente optimal abgeschöpft wird, wenn $x = \sqrt{\frac{4}{3}}$ (ME) ist. 3

Aufgaben zur Analysis

Aufgabe 5 **Lösungen Seite 19** **Punkte**

Die folgende Tabelle gibt die Stückkosten k, die variablen Stückkosten k_v und die Grenzkosten K′ zur ertragsgesetzlichen Kostenfunktion K an (x in ME; K(x) in GE):

x	1	2	3	4	5	6	7	8
k(x)	201,0	124,0	97,0	84,0	77,8	76,0	77,6	82,0
$k_v(x)$	57,0	52,0	49,0	48,0	49,0	52,0	57,0	64,0
K′(x)	51,0	44,0	43,0	48,0	59,0	76,0	99,0	128,0

Beurteilen Sie die Richtigkeit der folgenden Aussagen allein unter Zuhilfenahme der Tabellenwerte:

1.1 Das Betriebsminimum liegt bei 4 ME. 2

1.2 Die Kosten steigen zwischen 0 und 4 ME degressiv. 2

1.3 Die Fixkosten belaufen sich auf 144 GE. 1

Aufgabe 6

Die Absatzentwicklung eines Produktes wird durch die folgende Funktion beschrieben:

$f(t) = 9t \cdot e^{-0,3t} + 6$

dabei steht $t > 0$ für die Monate und f(t) für den Absatz in ME pro Monat.

1 Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die monatlichen Absatzzahlen maximal werden (notwendiges Kriterium genügt). 3

2 Nehmen Sie mit Hilfe des Graphen Stellung zu der folgenden Aussage:
In der zweiten Hälfte des ersten Jahres liegt der Zeitpunkt des maximalen Absatzrückganges. 2

Aufgaben zur Analysis

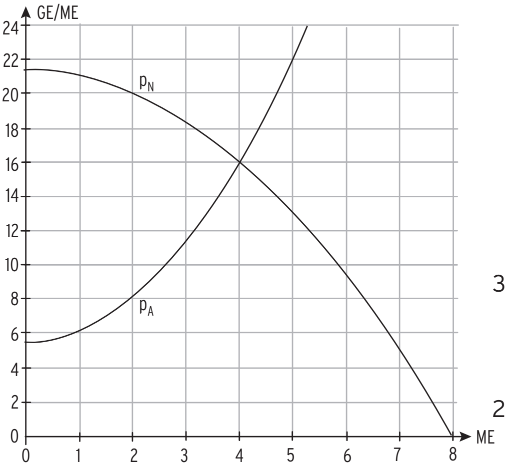
Aufgabe 7 **Lösungen Seite 19/20** **Punkte**

Gegeben sind folgende Angebotsfunktion p_A und Nachfragefunktion p_N:

$p_A(x) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{16}{3}$

$p_N(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{64}{3}$

x in ME, p(x) in GE/ME



1 Berechnen Sie das Marktgleichgewicht. 3

2 Begründen Sie anhand der Graphen, dass die Konsumentenrente geringer ist als die Produzentenrente. 2

Aufgabe 8

Die Entwicklung der Gesamtkosten der Produktion von Fahrrädern kann durch die Funktion K mit $K(x) = 0{,}5x^3 - 8x^2 + 45x + 70$ mit $D_K = [0; 13]$ beschrieben werden.

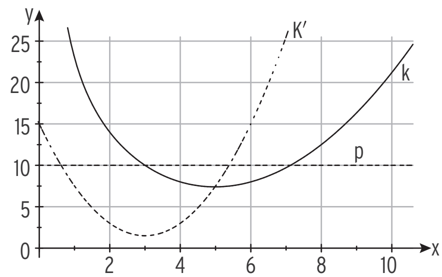
Berechnen Sie das Minimum der variablen Stückkosten und interpretieren Sie ihr Ergebnis.

Aufgabe 9

Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x) = (2x^2 + 5) \cdot e^{-2x}$.

Aufgabe 10

Die Unternehmensführung geht von einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion K 3. Grades aus. Die Abbildung zeigt den Graph der Grenzkostenfunktion K′, den Graph der Stückkostenfunktion k und den Graph der Preisfunktion p.



Prüfen Sie die folgenden Aussagen auf Richtigkeit und begründen Sie Ihre Entscheidung.

1 Der Graph von K besitzt eine Wendestelle in x = 3.

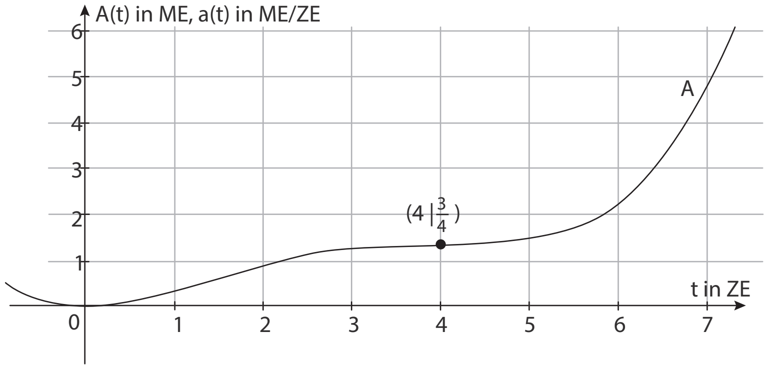
2 Je größer die produzierte Stückzahl, desto geringer sind die Stückkosten.

3 Die Schnittstelle von Preisgerade und Grenzkostenkurve ist die betriebsoptimale Stückzahl. 5

Aufgaben zur Analysis

Aufgabe 11 **Lösungen Seite 21** **Punkte**

Das Unternehmen Nokateo möchte für die anstehende Sommersaison den Unisex-Pullover Habicht auf den Markt bringen und analysiert den Produktlebenszyklus für den Pullover aus der Vorsaison. Die Abbildung zeigt den Graphen der Gesamtabsatzfunktion A des Vorgängermodells.



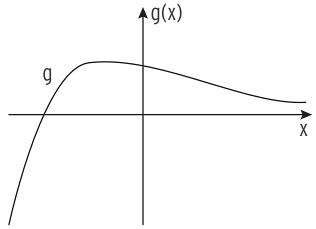
a) Skizzieren Sie den Graphen des Produktlebenszklus a in das vorgegebene Koordinatensystem. 2

b) Kennzeichnen Sie in der Grafik den ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich. 1

c) Der Produktlebenszyklus a kann durch eine Funktion der Funktionenschar $a_b(t) = \frac{1}{16}t^3 - bt^2 + t$ beschrieben werden. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der oben eingezeichneten Gesamtabsatzfunktion A. 2

Aufgabe 12

Die Abbildung zeigt den Graphen einer in ℝ definierten, differenzierbaren Funktion g.
Betrachtet wird eine in ℝ definierte Funktion f, für deren erste Ableitungsfunktion $f'(x) = e^{g(x)}$ gilt.



a) Untersuchen Sie, ob der Graph von f einen Extrempunkt hat. 2

b) Untersuchen Sie, ob der Graph von f einen Wendepunkt hat. 3

Lösungen - Aufgaben zur Analysis

Hilfsmittelfreier Teil der Zentralen Abiturprüfung

Aufgabe 1 (Aufgaben Seite 12)

1.1 Der Graph der Grenzkostenfunktion schneidet den Graphen der variablen Stückkostenfunktion im Betriebsminimum, den der Stückkostenfunktion im Betriebsoptimum. Also gehört f_3 zur Grenzkostenfunktion. Die kurzfristige Preisuntergrenze ist geringer als die langfristige Preisuntergrenze, so dass f_2 der variablen Stückkostenfunktion und f_1 der Stückkostenfunktion zugeordnet werden kann.

1.2 Minimum der variablen Stückkosten:

$k_v(x) = a\,x^2 + bx + c$; $k_v'(x) = 2ax + b$; $k_v''(x) = 2a > 0$

Notwendig und hinreichend bei ertragsgesetzlicher Kostenfunktion:

$k_v'(x) = 0$ $2ax + b = 0$

$x = -\frac{b}{2a}$; $x > 0$, da $b < 0$; $a > 0$ Minimalstelle

Aufgabe 2

2.1 Nullstellenbetrachtung

$f(t) = 0$ $(40 - t)e^{0,05t} = 0$

da $e^{0,05t} \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ $t = 40$

Nach 40 Monaten verschwindet das Produkt vom Markt.

2.2 Extremwertbetrachtung: Notwendige Bedingung $f'(t) = 0$

$f'(t) = 0,05(40 - t)e^{0,05t} - e^{0,05t} = e^{0,05t}\,(0,05(40 - t) - 1)$

(Produkt- und Kettenregel)

$f'(t) = 0$ $0,05(40 - t) - 1 = 0$

$1 - 0,05t = 0$

$t = 20$

Dazu hinreichend für Maximum ($f''(20) = -\frac{1}{400} \cdot 20 \cdot e^1 = -\frac{e}{20} < 0$

Alternativ: $f'(20) = e^{0,05 \cdot 20}\,(0,05(40 - 20) - 1) = e^1 \cdot 0 = 0$

Lösungen - Aufgaben zur Analysis

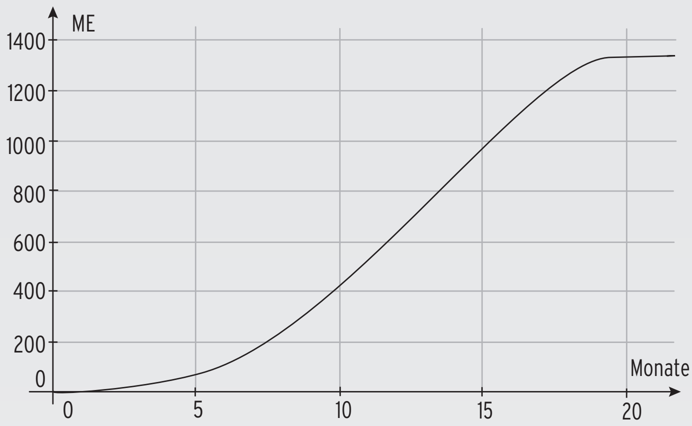
Aufgabe 3

(Aufgaben Seite 13)

3.1 Die gesamte Absatzmenge der ersten 20 Monate wird mit dem Integral berechnet.

$$\int_0^{20} f(t)dt = \int_0^{20} \left(-\frac{1}{10}t^3 + 2t^2\right)dt = \left[-\frac{1}{40}t^4 + \frac{2}{3}t^3\right]_0^{20} = -4000 + \frac{16000}{3} \approx 1333{,}3 \text{ (ME)}$$

3.2



Aufgabe 4

4.1 Bei Erhöhung des Preises p_1 wird die Konsumentenrente im Teilmarkt 1 geringer und gleichzeitig die des Teilmarkts 2 höher. Bei Verringerung des Preises verhält es sich umgekehrt.

(Bei einem Preis p_1 von 9 GE/ME erlischt der Teilmarkt 1, bei einem Preis p_1 von 5 GE/ME erlischt der Teilmarkt 2.)

4.2 Damit die Konsumentenrente höchstmöglich abgeschöpft wird, muss der Preis p_1 so gewählt werden, dass der Flächeninhalt des Rechtecks unter dem Flächenstück zur Konsumentenrente Teilmarkt 1 möglichst groß wird (dadurch wird die Konsumentenrente möglichst klein).

$A(x) = x \cdot f(x) - 5x = -x^3 + 9x - 5x = -x^3 + 4x$

Extremwertbetrachtung: $A'(x) = 0$ $\quad -3x^2 + 4 = 0$

$x^2 = \frac{4}{3}$

Mit $x > 0$: $\quad x = \sqrt{\frac{4}{3}}$

Dazu hinreichend: $A''\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = -6\sqrt{\frac{4}{3}} < 0$

Lösungen - Aufgaben zur Analysis

Aufgabe 5

(Aufgaben Seite 14)

1.1 Die variablen Stückkosten und die Grenzkosten sind im Betriebsminimum gleich, also ist aus der Tabelle abzulesen: $x_{BM} = 4$. Die Aussage ist also wahr.

1.2 Die Grenzkostenfunktion K′ gibt den Kostenzuwachs an. Dieser nimmt nur bis 3 ME ab (degressiver Zuwachs), danach wieder zu (progressiver Zuwachs). Daher ist die Aussage falsch.

1.3 Die Stückkostenfunktion und die variable Stückkostenfunktion unterscheiden sich nur durch den Term $\frac{K_{fix}}{x}$.

Daher gilt: $K_{fix} = k(1) - k_v(1) = 201 - 57 = 144$.

Die Aussage ist also wahr.

Aufgabe 6

1 $f(t) = 9t \cdot e^{-0{,}3t} + 6$; $f'(t) = 9 \cdot e^{-0{,}3t} + (-0{,}3) \cdot 9t \cdot e^{-0{,}3t} = 9 \cdot e^{-0{,}3t}(1 - 0{,}3t)$

(mit Produkt und Kettenregel)

Notwendige Bedingung: $f'(t) = 0$ $\quad 9(1 - 0{,}3t) = 0 \quad (e^{-0{,}3t} \neq 0)$

$$-0{,}3t + 1 = 0$$

$$t = \frac{1}{0{,}3} = \frac{10}{3}$$

Der maximale Absatz wird im 4. Monat erreicht.

2 Der stärkste Absatzrückgang entspricht dem Wendepunkt mit re/li-Krümmungswechsel.

Dieser liegt laut Graph bei ungefähr (8 | 12,5). Die Aussage ist also wahr.

Aufgabe 7

(Aufgaben Seite 15)

1 Schnittpunkt von Angebots- und Nachfragefunktion:

$p_A(x) = p_N(x)$ $\quad \frac{2}{3}x^2 + \frac{16}{3} = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{64}{3}$

$$x^2 = 16 \quad \Leftrightarrow x = \pm 4$$

Da negative Produktionswerte ökonomisch sinnlos sind, liegt die Gleichgewichtsmenge bei 4 ME. Der Gleichgewichtspreis liegt bei 16 GE/ME: $\quad p_A(4) = p_N(4) = 16$

Die Abbildung bestätigt das Ergebnis.

2 Der Inhalt der zwischen dem Graphen von p_N und $y = 16$ eingeschlossenen Fläche stellt den Geldwert der Konsumentenrente dar, der Flächeninhalt zwischen $y = 16$ und dem Graphen von p_A den Geldwert der Produzentenrente. Die Fläche der Konsumentenrente ist kleiner als die Fläche der Produzentenrente, somit ist die Konsumentenrente geringer als die Produzentenrente.

Lösungen - Aufgaben zur Analysis

Aufgabe 8 (Aufgaben Seite 15)

Gesamtkosten K mit $K(x) = 0{,}5x^3 - 8x^2 + 45x + 70$ mit $D_K = [0; 13]$

Minimum der variablen Stückkosten

variable Stückkosten $k_v(x) = 0{,}5x^2 - 8x + 45$; $k_v'(x) = x - 8$; $k_v''(x) = 1 > 0$

Minimum der variablen Stückkosten: $k_v'(x) = 0$ für $x = 8$

Nachweis: $k_v(8) = 13$ ist das Minimum wegen $k_v''(x) = 1 > 0$

Interpretation: Der minimale Verkaufspreis, bei dem bereits die fixen Kosten als Verlust in Kauf genommen werden, beträgt 13 GE/ME.

Aufgabe 9

Ableitung von f mit $f(x) = (2x^2 + 5) \cdot e^{-2x}$ mit der Produktregel

Mit $u(x) = 2x^2 + 5 \Rightarrow u'(x) = 4x$ und $v(x) = e^{-2x} \Rightarrow v'(x) = -2e^{-2x}$

folgt durch Einsetzen in $f'(x) = u(x)\,v'(x) + v(x)\,u'(x)$:

$f'(x) = (2x^2 + 5) \cdot (-2e^{-2x}) + e^{-2x} \cdot 4x$

Zusammenfassen durch Ausklammern: $f'(x) = e^{-2x}\left((2x^2 + 5) \cdot (-2) + 4x\right)$

Erste Ableitung von f: $f'(x) = e^{-2x}\left(-4x^2 - 10 + 4x\right)$

Aufgabe 10

1 Die Aussage ist richtig, da das Grenzkostenminimum etwa in $x = 3$ liegt. Damit ist $K''(3) = 0$; die notwendige Bedingung für Wendestelle ist erfüllt.

2 Die Aussage ist falsch, denn ab dem Betriebsoptimum (Stückkostenminimum) steigen die Stückkosten wieder an.

3 Die Aussage ist falsch, da die betriebsoptimale Stückzahl x_{BO} die Schnittstelle der Grenzkosten- und der Stückkostenfunktion ist.
Oder: x_{BO} ist die Minimalstelle von $k(x)$ ($k(x_{BO})$ langfristige Preisuntergrenze)
Die Grenzkostenkurve schneidet die Stückkostenkurve in deren Tiefpunkt.

II Teil B der zentralen Abiturprüfung mit Hilfsmittel (MMS)

1 Analysis

Mathematische Formeln Wirtschaft und Verwaltung

Kostenfunktionen x: Ausbringungsmenge in ME y: Gesamtkosten in GE	Gesamtkostenfunktion K mit	$K(x) = K_v(x) + K_f$
	Ertragsgesetzliche Kostenfunktion K mit	$K(x) = ax3 + bx2 + cx + d$
	K wächst degressiv	$K'(x) > 0 \wedge K''(x) < 0$
	K wächst progressiv	$K'(x) > 0 \wedge K''(x) > 0$
	Funktion der variablen Gesamtkosten	$K_v(x)$
	Funktion der gesamten Stückkosten k (Funktion der Durchschnittskosten)	$k(x) = \frac{K(x)}{x}$
	Funktion der variablen Stückkosten k_v	$k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x}$
	Grenzkostenfunktion	$K'(x)$ Kostenzuwachs
	Grenzstückkostenfunktion	$k'(x)$
	Betriebsoptimum (Minimalstelle von k(x))	x_{BO}
	Langfristige Preisuntergrenze	$k(x_{BO})$
	Betriebsminimum (Minimalstelle von $k_v(x)$)	x_{BM}
	kurzfristige Preisuntergrenze	$k(x_{BM})$
	Nachfragefunktion (Preis-Absatz-Funktion)	$p_N(x)$
	Angebotsfunktion	$p_A(x)$
	Gleichgewichtsmenge	x_G; Schnittstelle von $p_N(x)$ und $p_A(x)$
	Gleichgewichtspreis	$p_G = p_N(x_G) = p_A(x_G)$
	Marktgleichgewicht MG	$MG\ (x_G \mid p_G)$
	Konsumentenrente Differenz zwischen den theoretisch möglichen und den tatsächlichen Ausgaben für ein Produkt.	$\int_0^{x_G} (p_N(x) - p_G)dx$
	Produzentenrente Differenz aus erzieltem Umsatz und mindestens erwartetem Umsatz.	$\int_0^{x_G} (p_G - p_A(x))dx$
	Erlösfunktion	$E(x) = p \cdot x$; p Preis pro ME $E(x) = p_N(x) \cdot x$; $p_N(x)$ Preis abhängig von x
	Gewinnfunktion	$G(x) = E(x) - K(x)$
	Grenzgewinnfunktion	$G'(x)$
	Gewinnschwelle	x_{GS} 1. positive Nullstelle von G
	Gewinngrenze	x_{GG} 2. positive Nullstelle von G
	gewinnmaximale Ausbringungsmenge Maximalstelle von G(x): $G'(x) = 0$	x_{max}
	Cournot'scher Punkt	$C(x_{max} \mid p_N(x_{max}))$
	Stückdeckungsbeitrag d = dB	$dB(x) = p(x) - k_v(x)$
	Deckungsbeitrag D = DB	$DB(x) = G(x) + K_{fix} = E(x) - K_v(x)$

Aufgaben zur Analysis

Aufgabe 1 **Lösung Seite 74**

Die Pyrokomet GmbH stellt Feuerwerke aller Art her.
Unter anderem werden Feuerwerksraketen, Tischfeuerwerke und Böllersortimente für unterschiedliche Anlässe – z. B. für Hochzeiten – produziert.

1.1 Eine Aufgabe der Marketingabteilung der Pyrokomet GmbH besteht in der Auswertung umfangreicher Marktanalysen. Aus den Daten zur Produktsparte Tischfeuerwerk ergibt sich die folgende Angebotsfunktion p_A und die Nachfragesituation p_N:

$p_A(x) = a \cdot e^{0,2x} + 7$; $a, x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0, a > 0$.

$p_N(x) = 6 \cdot e^{-0,015x+2}$; $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$.

$p_A(x)$ und $p_N(x)$ geben den Preis in Geldeinheiten (GE) pro Mengeneinheit (ME)in Abhängigkeit von der angebotenen bzw. nachgefragten Menge x in ME an.

Dabei ist a ein von Steuern abhängiger Parameter.

1.1.1 Berechnen Sie für a = 0,03 das Marktgleichgewicht. 3 Punkte

1.1.2 Beschreiben Sie den Einfluss des Parameters a auf das Marktgleichgewicht. 3 Punkte

1.1.3 Der Leiter der Marketingabteilung behauptet:
„Bei einer Gleichgewichtsmenge von 30 ME am Markt ist die Produzentenrente mindestens doppelt so hoch wie die Konsumentenrente."
Beweisen oder widerlegen Sie seine Aussage. 6 Punkte

1.2 Der Produktentwickler erläutert, dass die Kosten zur Herstellung der Tischfeuerwerke mit Hilfe einer ganzrationalen Funktion dritten Grades modelliert werden können. Folgende Eckdaten liegen dazu vor:

- Bei einer Ausbringungsmenge von 10 ME liegen die Gesamtkosten bei 270 GE.
- Das Betriebsminimum ergibt sich bei 10 ME.
- Die variablen Stückkosten in Höhe von 32 GE/ME werden bei einer Ausbringungsmenge von 20 ME erreicht.
- Die Grenzkosten bei 5 ME betragen 13,25 GE/ME.

1.2.1 Leiten Sie aus den Eckdaten die Gleichung der Kostenfunktion K her. 8 Punkte

Aufgaben zur Analysis

Aufgabe 1

Gehen Sie im Folgenden von der Kostenfunktion K aus mit

$K(x) = 0{,}15x^3 - 3x^2 + 32x + 100;\ x \in \mathbb{R},\ x \geq 0.$

1.2.2 Der Produktentwickler gibt an, dass der Preis des Tischfeuerwerks mindestens 20 GE/ME betragen sollte, um langfristig die Kosten zu decken.
Beweisen oder widerlegen Sie seine Aussage. 6 Punkte

Aufgrund der bisherigen Analysen entschließt sich die Pyrokomet GmbH, das Tischfeuerwerk zu 27 GE/ME am Markt anzubieten.
Das Verhältnis von Gewinn zu Erlös wird als Rentabilität bzw. Gewinnquote bezeichnet. Entsprechend wird die Funktion der Rentabilität R definiert als Quotient aus Gewinnfunktion G und Erlösfunktion E:

$$R(x) = \frac{G(x)}{E(x)},\ x \in \mathbb{R} \text{ mit } x > 0$$

1.2.3 Berechnen Sie die Rentabilität für 10 ME, 12 ME und für 15 ME. 3 Punkte

1.2.4 Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse aus Teilaufgabe 1.2.3 hinsichtlich der Gewinnsituation. 3 Punkte

1.2.5 Zeigen Sie allgemein, dass die Rentabilität nicht größer als 1 werden kann.
4 Punkte

1.3 Die Verkaufsleiterin stellt eine Prognose für die Absatzzahlen der Hochzeitsfeuerwerke im nächsten Jahr auf. Diese modelliert sie mit
$f_k(t) = 200 \cdot (k \cdot t^2 + t) \cdot e^{-0{,}1t},\ \ 0 \leq t \leq 52,\ k \geq 0$
Dabei steht t für die Zeit seit Jahresbeginn in Wochen, k ist ein konjunkturabhängiger Parameter und $f_k(t)$ gibt die prognostizierten Absatzzahlen in Mengeneinheiten pro Woche an.

1.3.1 Bestimmen Sie den Wert des Parameters k so, dass die Absatzzahlen nach 15 Wochen ein lokales Maximum erreichen.
5 Punkte

1.3.2 Innerhalb eines Jahres sollen insgesamt 200 000 ME der Hochzeitsfeuerwerke abgesetzt werden.
Berechnen Sie den zugehörigen Wert des Parameters k.
4 Punkte

(Abitur Berufskolleg NRW 2016) 45 Punkte

Aufgaben zur Analysis

Aufgabe 2 **Lösung Seite 76**

Ob als Filterkaffee, Espresso, Cappuccino oder Latte Macchiato – Kaffee ist das Lieblingsgetränk der Deutschen.
War bis vor wenigen Jahren in fast jedem Haushalt eine Kaffeemaschine zur Zubereitung von Filterkaffee zu finden, halten inzwischen die Portionskaffeemaschinen Einzug. Der Markt an Kapsel- und Pad-Automaten wächst. Daher hat sich das Unternehmen Kaffeeduft auf die Produktion und den Verkauf von Kaffeekapseln und den zugehörigen Kaffeemaschinen spezialisiert.

Mehrere Discounter haben in der letzten Zeit Kapseln entwickelt, die zu der von Kaffeeduft hergestellten Maschine „Caps“ kompatibel sind. Daher soll dieses Modell durch die neuartige Maschine „Capsule“ ersetzt werden, die über ein modifiziertes Anstichverfahren verfügt, wodurch nur Kapseln von Kaffeeduft verwendet werden können.

1.1 Um sich einen Überblick über die Absatzsituation zu verschaffen, soll die Absatzentwicklung der Maschinen des bisherigen Modells „Caps“ analysiert werden.
Die Tabelle beschreibt die Absatzzahlen der jeweils angegebenen Monate.

Monat seit Januar 2014	0	8	9	12	15
Absatzzahlen in Stück pro Monat	0	33 000	40 000	63 000	67 000

1.1.1 Stellen Sie eine ganzrationale Funktion h vierten Grades auf, die die Absatzentwicklung beschreibt. Dabei gibt t die Zeit in Monaten nach der Markteinführung im Januar 2014 und h(t) die monatlichen Absatzzahlen in Stück zum Zeitpunkt t an.
Runden Sie die Koeffizienten auf zwei Nachkommastellen. (6 Punkte)

1.1.2 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion h. (4 Punkte)

1.2 Der Vertriebsleiter geht davon aus, dass sich die Entwicklung der Absatzzahlen des Modells „Caps“ durch die Funktion f mit

$$f(t) = -10{,}5t^4 + 300t^3 - 2500t^2 + 10000\,t$$

(t Zeit in Monaten, f(t) zugehörige monatliche Absatzzahlen in Stück)
beschreiben lässt.
Er vertritt die Auffassung, dass der Verlauf der Absatzzahlen des Modells „Caps“ einem Produktlebenszyklus mit den folgenden Phasen entspricht:

Phase	Einführung	Wachstum	Reife	Sättigung	Degeneration
Absatz	degressiv steigend	progressiv steigend	degressiv steigend	langsam fallend	stark fallend