

Ott
Lengersdorf

Abitur 2026 | *Grundkurs*

Aufgabensammlung zur zentralen Abiturprüfung
Mathematik am Berufskolleg — Berufliches Gymnasium —
Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung



Nordrhein-Westfalen

Merkur 
Verlag Rinteln

Wirtschaftswissenschaftliche Bücherei für Schule und Praxis

Begründet von Handelsschul-Direktor Dipl.-Hdl. Friedrich Hutkap †

Die Verfasser:

Roland Ott

Studium der Mathematik an der Universität Tübingen

Norbert Lengersdorf

Oberstudienrat am Berufskolleg für Wirtschaft und Verwaltung in Herzogenrath

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung des Verlages. Hinweis zu § 60 a UrhG: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung eingescannt und in ein Netzwerk eingestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Die Merkur Verlag Rinteln Hutkap GmbH & Co. KG behält sich eine Nutzung ihrer Inhalte für kommerzielles Text- und Data Mining (TDM) im Sinne von § 44b UrhG ausdrücklich vor. Für den Erwerb einer entsprechenden Nutzungserlaubnis wenden Sie sich bitte an copyright@merkur-verlag.de.

Umschlag: Kreis links: www.adpic.de

Kreis rechts: Robert Kneschke - Fotolia.com

* * * * *

17. Auflage 2025

© 2009 by MERKUR VERLAG RINTELN

Gesamtherstellung:

MERKUR VERLAG RINTELN Hutkap GmbH & Co. KG, 31735 Rinteln

E-Mail: info@merkur-verlag.de

lehrer-service@merkur-verlag.de

Internet: www.merkur-verlag.de

Merkur-Nr. 0478-17

ISBN 978-3-8120-1184-6

Vorwort

Die vorliegende Aufgabensammlung enthält auf die neue Prüfungsordnung für das Berufskolleg mit gymnasialer Oberstufe in Nordrhein-Westfalen abgestimmte Aufgaben zur Vorbereitung auf das Abitur 2026 an beruflichen Gymnasien im Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung. **Alle Aufgaben sind entsprechend den Abiturvorgaben 2026 ausgewählt worden.**

Die zentrale Abiturprüfung 2026 besteht aus zwei Teilen, einem hilfsmittelfreien Prüfungsteil A und einem Prüfungsteil B mit Hilfsmittel **(erstmalig nur MMS (CAS))**.

Die Aufgaben für den **Grundkurs** sind gegliedert nach den Prüfungsgebieten:

Analysis mit Anwendungen, Stochastik und Lineare Algebra/Analytische Geometrie.

Im Analysis-Teil werden als thematischer Schwerpunkt die ganzrationalen Funktionen und die Exponentialfunktionen und die Modellierung von berufsbezogenen Anwendungen mit Hilfe dieser Funktionstypen verlangt. Dabei handelt es sich um das Modell der vollständigen Konkurrenz sowie die Absatz-/Umsatzentwicklung.

Die Stochastik behandelt fokussiert die bedingte Wahrscheinlichkeit, die Binomialverteilung mit Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung und den einseitigen Hypothesentest.

Die Lineare Algebra/Analytische Geometrie hat die Schwerpunkte Lineare Gleichungssysteme, Lineare Optimierungsprobleme sowie mehrstufige Produktionsprozesse als ökonomische Anwendung.

Die Einteilung nach Prüfungsgebieten ermöglicht ein gezieltes Üben.

Die Aufgaben sind als Übungsaufgaben zu verstehen, sowohl im Umfang als auch in den Fragestellungen. Relevante Fragestellungen können mehrfach auftreten.

Übung ist ein bedeutender Baustein zum Erfolg.

Da die Aufgabensammlung allen Schüler/innen bei der Vorbereitung auf das schriftliche Abitur helfen soll, sind zu allen Aufgaben ausführliche Lösungen angegeben.

An verschiedenen Stellen sind Lösungsalternativen aufgezeigt, ohne einen Anspruch auf Vollständigkeit zu erheben.

Autoren und Verlag wünschen viel Glück und Erfolg bei der Abiturprüfung.

Inhaltsverzeichnis

	Vorwort/Inhaltsverzeichnis.....	6
	Ablauf der schriftlichen Abiturprüfung 2026	7
I	Hilfsmittelfreier Teil A der Zentralen Abiturprüfung	8
	Hilfsmittelfreier Teil A - Analysis.....	8
	Lösungen	14
	Hilfsmittelfreier Teil A - Lineare Algebra/Analytische Geometrie	19
	Lösungen.....	26
	Hilfsmittelfreier Teil A - Stochastik	31
	Lösungen.....	36
II	Musteraufgabensätze zum Aufgabenteil A ab 2024	40
	Aufgabensatz 1	40
	Aufgabensatz 2	44
	Aufgabensatz 3	47
	Lösungen	50
III	Teil B der Abiturprüfung mit Hilfsmittel - MMS (CAS)	57
	Operatorenliste.....	57
1	Analysis	59
	Mathematische Formeln Wirtschaft und Verwaltung	59
	Aufgaben zur Abiturvorbereitung - Analysis	60
	Lösungen.....	68
2	Lineare Algebra/Analytische Geometrie	76
	Formelsammlung.....	76
	Aufgaben zur Abiturvorbereitung - Lineare Algebra	77
	Lösungen	95
3	Stochastik	112
	Formelsammlung zur Stochastik	112
	Aufgaben zur Prüfungsvorbereitung - Stochastik	114
	Lösungen.....	125
IV	Zentralen Abiturprüfungen GK CAS mit Lösungen	137
	Zentrale Abiturprüfung 2017	137
	Zentrale Abiturprüfung 2018.....	149
	Zentrale Abiturprüfung 2019	162
	Zentrale Abiturprüfung 2020	176
	Zentrale Abiturprüfung 2021	192
	Zentrale Abiturprüfung 2022	206
	Zentrale Abiturprüfung 2023	222
	Zentrale Abiturprüfung 2024	240
	Zentrale Abiturprüfung 2025	255

Ablauf der schriftlichen Abiturprüfung 2026

Grundkurs

Aufgabenteil A Bearbeitung ohne Hilfsmittel				Aufgabenteil B Bearbeitung mit Hilfsmittel	
Pflichtaufgaben		Wahlaufgaben (zwei aus vier, davon eine Analysis)		Pflichtaufgaben	
Analysis	5	Analysis	5	Analysis	25
Stochastik	5	Analysis	5	Stochastik	25
Analytische Geometrie/ Lineare Algebra	5	Stochastik	5	Analytische Geometrie/ Lineare Algebra	25
		Analytische Geometrie/ Lineare Algebra	5		
Summe	15	Summe	10	Summe	75
Gesamtsumme: 100 BE + 5 BE (Darstellungsleistung) = 105 BE					

Mindestens zwei der Teilaufgaben im Aufgabenteil A haben **Anwendungsbezug**.

Die Aufgaben sowohl im Teil A als auch im Teil B bestehen jeweils aus Teilaufgaben.

Organisation

Zu Beginn der Bearbeitungszeit erhält der Prüfling die beiden zu bearbeitenden Aufgabenteile A und B. Die zugelassenen Hilfsmittel (CAS, Formelsammlung) werden noch nicht ausgegeben.

Der Prüfling gibt individuell nach Bearbeitung den Aufgabenteil A und seine Ausarbeitungen zum Aufgabenteil A ab und erhält im Gegenzug Zugang zu den zugelassenen Hilfsmitteln.

SchülerIn bearbeitet alle Aufgaben.

Die Gesamtbearbeitungszeit für beide Prüfungsteile beträgt im Grundkurs einschließlich Auswahlzeit 255 Minuten.

Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist in beiden Prüfungsteilen der Klausur zugelassen.

I Hilfsmittelfreier Teil A der Zentralen Abiturprüfung GK

Hilfsmittelfreier Teil - Analysis

Lösungen Seite 14

Aufgabe 1

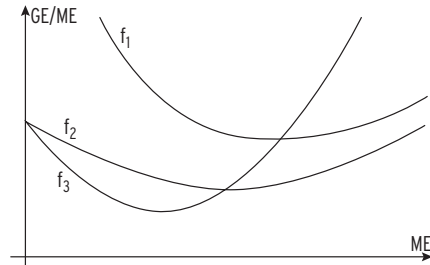
Punkte

Zur ertragsgesetzlichen Kostenfunktion

$$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d; a, c, d > 0, b < 0,$$

x in ME, $K(x)$ in GE,

sind in der nebenstehenden Abbildung die Graphen der Grenzkostenfunktion, der Stückkostenfunktion und der variablen Stückkostenfunktion dargestellt.



1.1 Ordnen Sie dem jeweiligen Graphen die entsprechende ökonomische Funktion begründet zu.

2

1.2 Beweisen Sie, dass die betriebsminimale Ausbringungsmenge bei $x = -\frac{b}{2a}$ liegt.

3

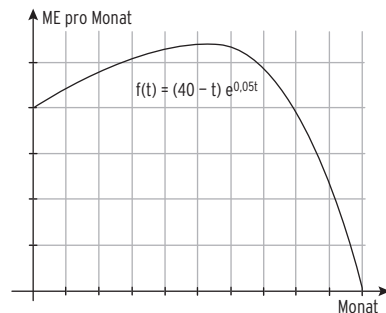
Aufgabe 2

Die monatlichen Absatzzahlen eines Produkts

werden mit $f(t) = (40 - t)e^{0,05t}$,

(t in Monaten, $f(t)$ in ME/Monat)

modelliert. Der nebenstehende Graph verdeutlicht die Situation.



2.1 Berechnen Sie den Zeitpunkt, bis zu dem das Produkt auf dem Markt abgesetzt werden kann.

2

2.2 Zeigen Sie, dass der Zeitpunkt des maximalen monatlichen Absatzes bei $t = 20$ liegt.

3

($f''(t) = -\frac{1}{400} t e^{0,05t}$ kann verwendet werden.)

Hilfsmittelfreier Teil - Analysis

Lösung Seite 14/15

Aufgabe 3

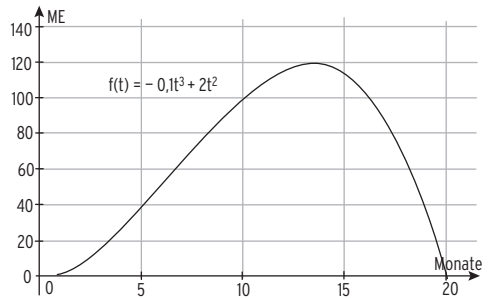
Punkte

Die monatlichen Absatzzahlen eines neuartigen Produkts werden mit

$$f(t) = -\frac{1}{10}t^3 + 2t^2$$

(t in Monaten, $f(t)$ in ME/Monat)

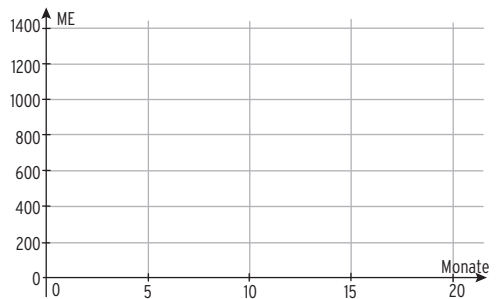
modelliert. Der nebenstehende Graph verdeutlicht die Situation.



- 3.1 Bestimmen Sie die in den ersten 20 Monaten insgesamt abgesetzte Menge.

3

- 3.2 Skizzieren Sie in das nebenstehende Koordinatensystem den Graphen der Funktion, die den Gesamtabsatz in Abhängigkeit von der Zeit angibt.

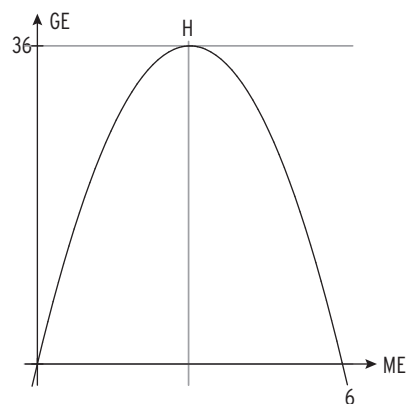


2

Aufgabe 4

Lösung Seite 15

- a) Bestimmen Sie den Funktionsterm für die Erlösfunktion unter der Voraussetzung, dass es sich um eine ganzrationale Funktion 2. Grades handelt.
- b) Ergänzen Sie den Graphen der 1. Ableitung in das Koordinatensystem. Beschreiben Sie den Verlauf des Ableitungsgraphen mathematisch und ökonomisch.



3

2

Hilfsmittelfreier Teil - Analysis

Lösungen Seite 15

Aufgabe 5

Punkte

Die folgende Tabelle gibt die Stückkosten k , die variablen Stückkosten k_v und die Grenzkosten K' zur ertragsgesetzlichen Kostenfunktion K an (x in ME; $K(x)$ in GE):

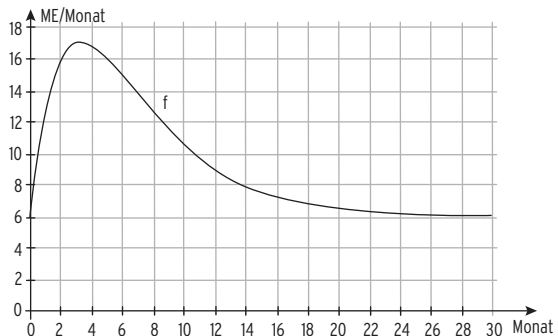
x	1	2	3	4	5	6	7	8
$k(x)$	201,0	124,0	97,0	84,0	77,8	76,0	77,6	82,0
$k_v(x)$	57,0	52,0	49,0	48,0	49,0	52,0	57,0	64,0
$K'(x)$	51,0	44,0	43,0	48,0	59,0	76,0	99,0	128,0

Beurteilen Sie die Richtigkeit der folgenden Aussagen allein unter Zuhilfenahme der Tabellenwerte:

- 1.1 Das Betriebsminimum liegt bei 4 ME. 2
- 1.2 Die Kosten steigen zwischen 0 und 4 ME degressiv. 1
- 1.3 Die Fixkosten belaufen sich auf 144 GE. 2

Aufgabe 6

Die Absatzentwicklung eines Produktes wird durch die folgende Funktion beschrieben:
 $f(t) = 9t \cdot e^{-0,3t} + 6$
 dabei steht $t > 0$ für die Monate und $f(t)$ für den Absatz in ME pro Monat.



- 1 Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die monatlichen Absatzzahlen maximal werden (notwendiges Kriterium genügt). 3
- 2 Nehmen Sie mit Hilfe des Graphen Stellung zu der folgenden Aussage:
 In der zweiten Hälfte des ersten Jahres liegt der Zeitpunkt des maximalen Absatzrückganges. 2

Hilfsmittelfreier Teil - Analysis

Lösungen Seite 16

Aufgabe 7

Punkte

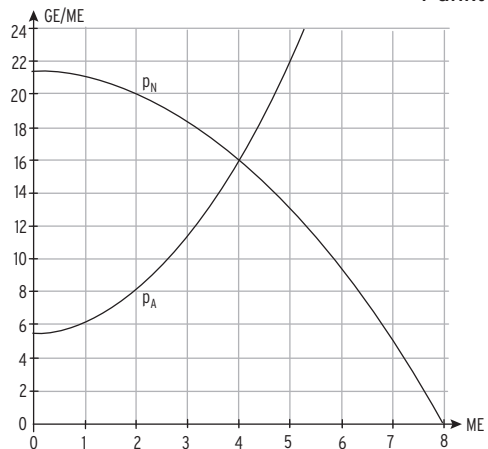
Gegeben sind folgende Angebotsfunktion

p_A und Nachfragefunktion p_N :

$$p_A(x) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{16}{3}$$

$$p_N(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{64}{3}$$

x in ME, $p(x)$ in GE/ME



- 1 Berechnen Sie das Marktgleichgewicht. 3
- 2 Begründen Sie anhand der Graphen, dass die Konsumentenrente geringer ist als die Produzentenrente. 2

Aufgabe 8

Die Entwicklung der Gesamtkosten der Produktion von Fahrrädern kann durch die Funktion K mit $K(x) = 0,5x^3 - 8x^2 + 45x + 70$ mit $D_K = [0; 13]$ beschrieben werden.

Berechnen Sie das Minimum der variablen Stückkosten und interpretieren Sie ihr Ergebnis.

Aufgabe 9

Lösungen Seite 17

Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f mit $f(x) = (2x^2 + 5) \cdot e^{-2x}$.

Aufgabe 10

Ein Behälter enthält zu Beobachtungsbeginn zwei Liter einer Flüssigkeit. Für die anschließenden fünf Stunden gibt die Funktion f mit $f(t) = -t \cdot (t - 4)$ die momentane Zuflussrate der Flüssigkeit in Liter pro Stunde an.

Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden.

- a) Begründen Sie, dass das Volumen der Flüssigkeit im Behälter innerhalb der ersten vier Stunden nach Beobachtungsbeginn durchgehend zunimmt. 3
- b) Geben Sie eine Gleichung an, mit der berechnet werden kann, wie viele Stunden vom Beobachtungsbeginn an vergehen, bis der Behälter sieben Liter der Flüssigkeit enthält. 2

Hilfsmittelfreier Teil A - Analysis

Lösungen Seite 17

Aufgabe 11

Punkte

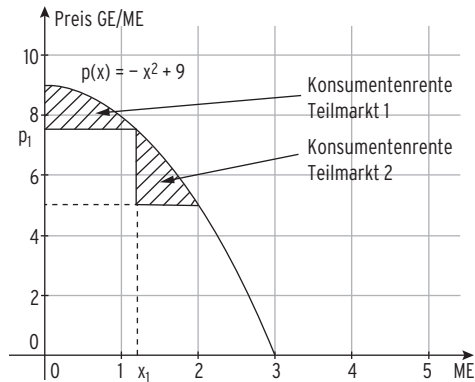
Die Preisentwicklung eines Produkts entspricht der Nachfragefunktion p mit

$$p(x) = -x^2 + 9$$

x in ME, $p(x)$ in GE/ME.

Das Produkt wird auf dem Teilmarkt 1 für p_1 GE/ME und auf dem Teilmarkt 2 für 5 GE/ME verkauft.

Es werden insgesamt 2 ME abgesetzt (vgl. nebenstehende Abbildung).



- 1 Beschreiben Sie den Einfluss der Höhe des Preises auf die Konsumentenrente des jeweiligen Teilmarkts. 2
- 2 Weisen Sie nach, dass die gesamte Konsumentenrente optimal abgeschöpft wird, wenn $x_1 = \sqrt{\frac{4}{3}}$ (ME) ist. 3

Aufgabe 12

Lösungen Seite 18

Für die Angebotsfunktion eines Massengutes gilt die Vorschrift der Form: $p_A(x) = ax^2 + b$.

Für die Angebotsfunktion gelten folgende Bedingungen:

Beträgt der Marktpreis des Gutes 10 GE, so wird das Gut nicht mehr angeboten.

Das Marktgleichgewicht wird bei einer Absatzmenge von 60 ME und einem Marktpreis von 64 GE/ME erreicht. Berechnen Sie die Werte für a und b .

Berechnen Sie die Produzentenrente. 5

Aufgabe 13

Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_{-1}^1 (\sqrt{2} \cdot x)^2 dx$. 3

Hilfsmittelfreier Teil - Analysis

Lösungen Seite 18

Aufgabe 14

Punkte

Gegeben sind die zwei Funktionen f und g mit den Funktionsgleichungen

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 9x + 18$$

$$g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 9x + 18$$

In Abbildung 1 sind die Graphen der Ableitungen von f und g im

Bereich $[0; 10]$ dargestellt.

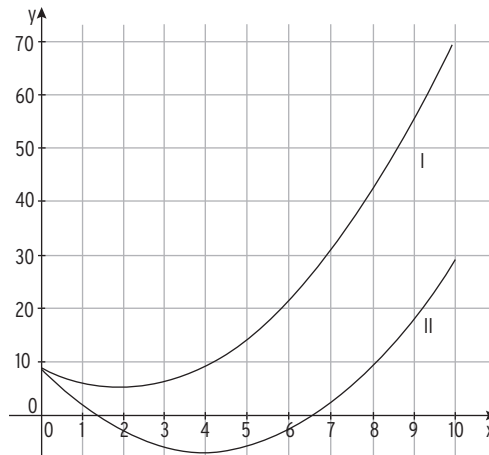


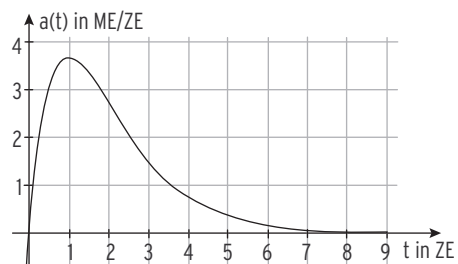
Abbildung 1

- a) Entscheiden Sie Sie begründet, welcher Graph die Ableitung von f und welcher Graph die Ableitung von g darstellt. 3
- b) Prüfen Sie, welcher der beiden Graphen nicht zu der Grenzkostenfunktion einer ertragsgesetzlichen Kostenfunktion gehören kann. 2

Aufgabe 15

Die PRINTFIX AG fertigt innovative und hochwertige 3D-Drucker. Der momentane Absatz in Mengeneinheiten pro Zeiteinheit (ME/ZE) kann durch den Graphen a des Produktlebenszyklus $a(t) = 10t \cdot e^{-t}$ mit $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ beschrieben werden.

- a) Bestimmen Sie ausschließlich mit Hilfe der notwendigen Bedingung den Zeitpunkt, an dem die PRINTFIX AG die meisten 3D-Drucker pro ZE absetzt.



- b) In $t = 2$ liegt eine Wendestelle vor. Interpretieren Sie diese ökonomisch.

3

2

Lösungen – Hilfsmittelfreier Teil A der Zentralen Abiturprüfung

Hilfsmittelfreier Teil - Analysis Lösungen

Aufgabe 1

Aufgaben Seite 8

- 1.1 Der Graph der Grenzkostenfunktion schneidet den Graphen der variablen Stückkostenfunktion im Betriebsminimum, den der Stückkostenfunktion im Betriebsoptimum. Also gehört f_3 zur Grenzkostenfunktion. Die kurzfristige Preisuntergrenze ist geringer als die langfristige Preisuntergrenze, so dass f_2 der variablen Stückkostenfunktion und f_1 der Stückkostenfunktion zugeordnet werden kann.

- 1.2 Minimum der variablen Stückkosten:

$$k_v(x) = a x^2 + bx + c; \quad k_v'(x) = 2ax + b$$

Notwendig und hinreichend bei ertragsgesetzlicher Kostenfunktion:

$$k_v'(x) = 0 \qquad 2ax + b = 0$$

$$x = -\frac{b}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \text{ ist Minimalstelle, da } k_v''(x) = 2a > 0$$

Aufgabe 2

- 2.1 Nullstellenbetrachtung

$$f(t) = 0 \qquad (40 - t)e^{0,05t} = 0$$

$$\text{da } e^{0,05t} \neq 0 \text{ für alle } t \in \mathbb{R} \qquad t = 40$$

Nach 40 Monaten verschwindet das Produkt vom Markt.

- 2.2 Extremwertbetrachtung: Notwendige Bedingung $f'(t) = 0$:

$$f'(t) = 0,05(40 - t)e^{0,05t} - e^{0,05t} = e^{0,05t} (0,05(40 - t) - 1)$$

(Produkt- und Kettenregel)

$$f'(20) = 0 \qquad 0,05(40 - 20) - 1 = 0 \quad \text{wahr}$$

$$\text{Dazu hinreichend für Maximum: } f''(20) = -\frac{1}{400} \cdot 20 \cdot e^1 = -\frac{e}{20} < 0$$

Aufgabe 3

Aufgaben Seite 9

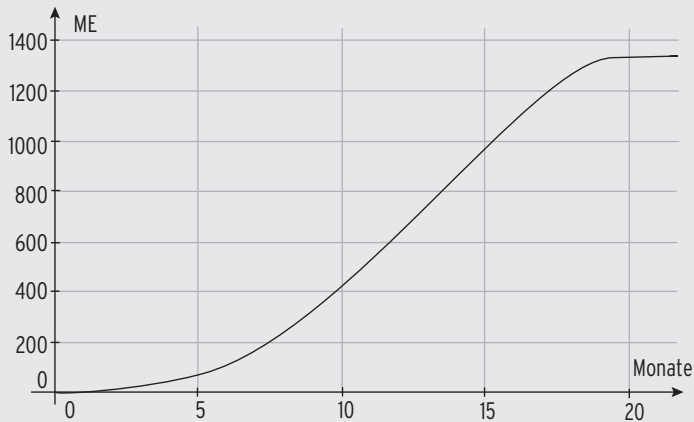
- 3.1 Die gesamte Absatzmenge der ersten 20 Monate wird mit dem Integral berechnet.

$$\int_0^{20} f(t) dt = \int_0^{20} \left(-\frac{1}{10}t^3 + 2t^2\right) dt = \left[-\frac{1}{40}t^4 + \frac{2}{3}t^3\right]_0^{20} = -4000 + \frac{16000}{3} = 1333,3 \text{ (ME)}$$

Hilfsmittelfreier Teil A - Analysis Lösungen

Aufgabe 3

3.2



Aufgabe 4

a) Ansatz: $E(x) = ax^2 + bx$ wegen $E(0) = 0$; $E'(x) = 2ax + b$

Bedingungen und LGS: $E(3) = 36$

$$9a + 3b = 36$$

$$3a + b = 12 \quad | \cdot (-1)$$

$$E'(3) = 0$$

$$6a + b = 0$$

Addition ergibt:

$$3a = -12 \Leftrightarrow a = -4$$

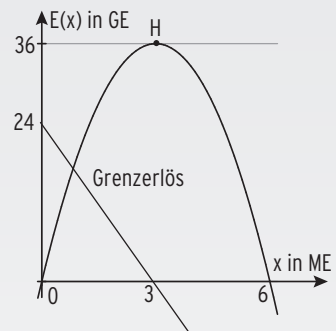
Einsetzen in $6a + b = 0$:

$$b = 24$$

Funktionsterm für die Erlösfunktion: $E(x) = -4x^2 + 24x$

Hinweis: $E(6) = 0$ führt auf $36a + 6b = 0 \Leftrightarrow 6a + b = 0$

- b) Graph der 1. Ableitung: fallende Gerade, die oberhalb und unterhalb der Abszissenachse im 1. und 4. Quadranten verläuft ($x \geq 0$). Sie schneidet die x-Achse an der Maximalstelle von E. Mit jeder zusätzlich verkauften ME wird der zusätzliche Erlös kleiner. Ab 3 ME nimmt der Erlös ab, weil der Grenzerlös $E'(x) = -8x + 24$ negativ wird.



Aufgabe 5

Aufgaben Seite 10

- 1.1 Die variablen Stückkosten und die Grenzkosten sind im Betriebsminimum gleich, also ist aus der Tabelle abzulesen: $x_{BM} = 4$. Die Aussage ist also wahr.
oder: k_v ist minimal in $x = 4$
- 1.2 Die Grenzkostenfunktion K' gibt den Kostenzuwachs an. Dieser nimmt nur von 0 ME bis 3 ME ab (degressiver Zuwachs), danach wieder zu (progressiver Zuwachs). Daher ist die Aussage falsch.

Hilfsmittelfreier Teil A - Analysis Lösungen

Aufgabe 5

Aufgaben Seite 10

1.3 Die Stückkostenfunktion und die variable Stückkostenfunktion unterscheiden

sich nur durch den Term $\frac{K_{\text{fix}}}{x}$: $k(x) = k_v(x) + \frac{K_{\text{fix}}}{x}$

Daher gilt: $K_{\text{fix}} = k(1) - k_v(1) = 201 - 57 = 144$. Die Aussage ist also wahr.

Aufgabe 6

$$1 \quad f(t) = 9t \cdot e^{-0,3t} + 6; \quad f'(t) = 9 \cdot e^{-0,3t} + (-0,3) \cdot 9t \cdot e^{-0,3t} = (9 - 2,7t) \cdot e^{-0,3t}$$

(mit Produkt und Kettenregel)

Notwendige Bedingung: $f'(t) = 0$

$$9 - 0,3 \cdot 9t = 0 \quad (e^{-0,3t} \neq 0)$$

$$-2,7t + 9 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{10}{3}$$

Der maximale Absatz wird im 4. Monat erreicht.

2 Der stärkste Absatzrückgang entspricht dem Wendepunkt mit re/li-Krümmungswechsel. Dieser liegt laut Graph bei ungefähr (8 | 12,5). Die Aussage ist also wahr.

Aufgabe 7

Aufgaben Seite 11

1 Schnittpunkt von Angebots- und Nachfragefunktion:

$$p_A(x) = p_N(x) \quad \frac{2}{3}x^2 + \frac{16}{3} = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{64}{3} \Leftrightarrow x^2 = 16$$

liefert die Lösungen $x = \pm 4$

Da negative Produktionswerte ökonomisch sinnlos sind, liegt die Gleichgewichtsmenge bei 4 ME. Der Gleichgewichtspreis liegt bei 16 GE/ME:

$$p_A(4) = p_N(4) = 16 \quad \text{Die Abbildung bestätigt das Ergebnis.}$$

2 Der Inhalt der zwischen dem Graphen von p_N und $y = 16$ eingeschlossenen Fläche stellt den Geldwert der Konsumentenrente dar, der Flächeninhalt zwischen $y = 16$ und dem Graphen von p_A den Geldwert der Produzentenrente. Die Fläche der Konsumentenrente ist kleiner als die Fläche der Produzentenrente, somit ist die Konsumentenrente geringer als die Produzentenrente.

Aufgabe 8

Gesamtkosten K mit $K(x) = 0,5x^3 - 8x^2 + 45x + 70$ mit $D_K = [0; 13]$

Minimum der variablen Stückkosten

variable Stückkosten $k_v(x) = 0,5x^2 - 8x + 45$; $k_v'(x) = x - 8$; $k_v''(x) = 1 > 0$

Minimum der variablen Stückkosten: $k_v'(x) = 0$ für $x = 8$

Nachweis: $k_v(8) = 13$ ist das Minimum wegen $k_v''(x) = 1 > 0$

Interpretation: Der minimale Verkaufspreis, bei dem bereits die fixen Kosten als Verlust in Kauf genommen werden, beträgt 13 GE/ME.

II Musteraufgabensätze zum Aufgabenteil A ab 2024

Aufgabensatz 1 Grundkursfach Mathematik

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

Lösungen Seite 50

Pflichtaufgabe Analysis

Punkte

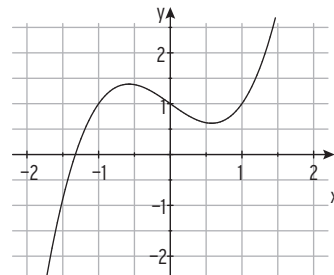
Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f , g und h durch

$$f(x) = x^2 - x + 1, \quad g(x) = x^3 - x + 1 \quad \text{und} \quad h(x) = x^4 + x^2 + 1.$$

- a) Die Abbildung zeigt den Graphen einer der drei Funktionen.

3

Geben Sie an, um welche Funktion es sich handelt. Begründen Sie, dass der Graph die anderen beiden Funktionen nicht darstellt.



- b) Die erste Ableitungsfunktion von h ist h' .

Bestimmen Sie den Wert von $\int_0^1 h'(x) dx$.

2

Pflichtaufgabe Stochastik

Bei der Wintersportart Biathlon wird bei jeder Schießeinlage auf fünf Scheiben geschossen. Ein Biathlet tritt bei einem Einzelrennen zu einer Schießeinlage an, bei der er auf jede Scheibe einen Schuss abgibt. Diese Schießeinlage wird modellhaft durch eine Bernoullikette mit der Länge 5 und der Trefferwahrscheinlichkeit p beschrieben. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Treffer.

- a) Nennen Sie in diesem Sachzusammenhang das Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit mit $P(X < 3)$ bestimmt werden kann.

1

- b) Entscheiden Sie, welcher der beiden Terme die Wahrscheinlichkeit für genau vier Treffer beschreibt: (i) $\binom{5}{4} \cdot p \cdot (1-p)^4$ (ii) $\binom{5}{4} \cdot p^4 \cdot (1-p)$

2

- c) Erläutern Sie anhand eines Beispiels, dass die modellhafte Beschreibung der Schießeinlage durch eine Bernoullikette unter Umständen der Realität nicht gerecht wird.

2

Aufgabensatz 1

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

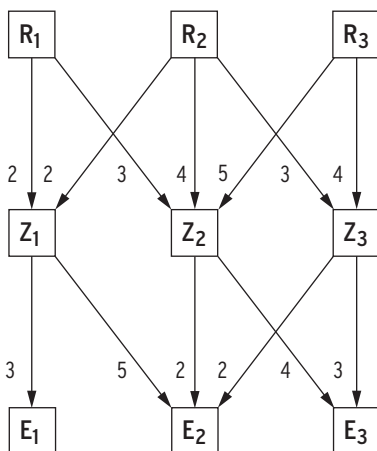
Pflichtaufgabe Lineare Algebra

Punkte

Ein Betrieb erzeugt aus drei Rohstoffen (R_1, R_2, R_3) drei Zwischenprodukte (Z_1, Z_2, Z_3), die zu drei Endprodukten (E_1, E_2, E_3) weiterverarbeitet werden. Es gibt Werte für a und b , so dass die Zusammenhänge durch den folgenden Verflechtungsgraphen und die Rohstoff-Endprodukt-Tabelle gegeben sind.

Verflechtungsgraph

Angaben in Mengeneinheiten



Rohstoff-Endprodukt-Tabelle

Anzahl der benötigten ME der Rohstoffe je ME des Endprodukts

Endprodukt			
	E_1	E_2	E_3
Rohstoff			
R_1	a	16	12
R_2	6	b	25
R_3	0	18	32

- a) Der Zusammenhang Rohstoff-Zwischenprodukt wird durch eine Matrix A_{RZ} , der Zusammenhang Zwischenprodukt-Endprodukt durch eine Matrix B_{ZE} und der Zusammenhang Rohstoff-Endprodukt durch eine Matrix C_{RE} beschrieben.

Geben Sie eine Beziehung zwischen diesen drei Matrizen an.

1

- b) Bestimmen Sie die fehlenden Wert für a und b .

2

- c) Betrachtet werden die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie, dass B die zu A inverse Matrix ist.

2

Aufgabensatz 1

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

Wahlaufgaben

Bearbeiten Sie 2 Aufgaben aus den 4 Wahlaufgaben, davon mindestens eine Analysis-Aufgabe

Wahlaufgabe 1 – Analysis

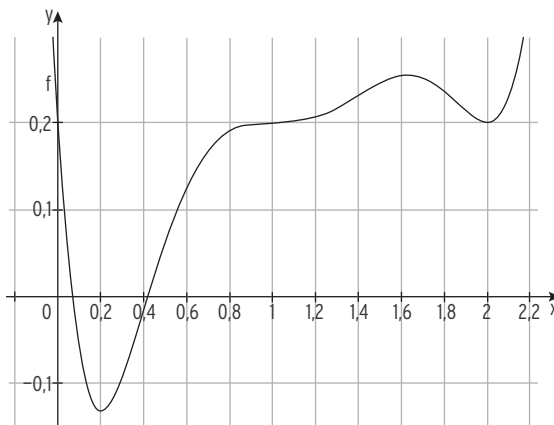
Punkte

Eine Funktion f ist durch ihre Gleichung $f(x) = x^3 - 8x^2 + 12x$ gegeben.

- Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f . 2
- Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t an den Graphen von f im Punkt $P(1 \mid f(1))$. 3

Wahlaufgabe 2 – Analysis

Abgebildet ist der Graph einer Funktion f .



- Geben Sie je einen Wert für a und b an, so dass gilt:
 - $f'(0,2) = a$
 - $f''(b) = 0$. 2
- Markieren Sie einen Punkt $P(x_P \mid y_P)$ auf dem Funktionsgraphen von f , für den gilt: 3
 $f''(x_P) = 0$ und $f'(x_P) < 0$.
 Begründen Sie, warum der von Ihnen gewählte Punkt P die beiden Bedingungen erfüllt.

Aufgabensatz 1

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

Wahlaufgaben

Punkte

Wahlaufgabe 3 Stochastik

60% der Kunden eines Reiseunternehmens reisen gerne in die Region A,
30% in die Region B, 20% reisen in jede der beiden Regionen gerne.

- | | |
|---|---|
| a) Unter denjenigen Kunden, die gerne in die Region A reisen, wird eine Person zufällig ausgewählt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Person auch gerne in die Region B reist. | 2 |
| b) Berechnen Sie den Anteil der Kunden, die entweder in die Region A oder in die Region B gerne reisen. | 3 |

Wahlaufgabe 4 Lineare Algebra

Im Folgenden sind alle vorliegenden $(n \times n)$ - Matrizen invertierbar. 5
 E ist die Einheitsmatrix.
 Lösen Sie die Matrixengleichung $(B + A) \cdot (E - A) = (X - B) \cdot A$
 nach X auf und vereinfachen Sie soweit wie möglich.

Musteraufgabensätze zum Aufgabenteil A ab 2024

Aufgabensatz 2

Aufgabenteil A: ohne Hilfsmittel

Lösungen Seite 52

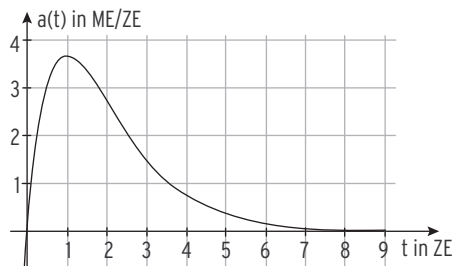
Pflichtaufgaben

Punkte

Pflichtaufgabe Analysis

Die PRINTFIX AG fertigt innovative und hochwertige 3D-Drucker. Der momentane Absatz in Mengeneinheiten pro Zeiteinheit (ME/ZE) kann durch den Graphen a des Produktlebenszyklus $a(t) = 10t \cdot e^{-t}$ mit $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ beschrieben werden.

- a) Bestimmen Sie ausschließlich mit Hilfe der notwendigen Bedingung den Zeitpunkt, an dem die PRINTFIX AG die meisten 3D-Drucker pro ZE absetzt.
- b) In $t = 2$ liegt eine Wendestelle vor. Interpretieren Sie diese ökonomisch.



3

2

Pflichtaufgabe Stochastik

In einer Urne U_1 befinden sich vier rote und zwei gelbe Kugeln, in einer Urne U_2 zwei rote, eine gelbe und eine blaue Kugel.

- a) Eine der beiden Urnen wird zufällig ausgewählt. Anschließend wird daraus zweimal hintereinander jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmt werden kann, dass beide entnommenen Kugeln rot sind.
- b) Eine der beiden Urnen wurde zufällig ausgewählt; aus dieser wurde eine Kugel zufällig entnommen. Die entnommene Kugel ist gelb oder blau. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die entnommene Kugel aus der Urne U_1 stammt.

2

3

Pflichtaufgabe Lineare Algebra

Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.5 Entscheiden Sie für jeden der Terme $A + B$ und $A \cdot B$, ob er definiert ist.

Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

2

1.6 Bestimmen Sie für die Matrix $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ die Werte von a , b , c und d so, dass

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ gilt.}$$

3

III Teil B der Abiturprüfung mit Hilfsmittel – MMS (CAS)

Operatoren

Operator	AFB	Erläuterung
angeben, nennen	I, II	Für die Angabe bzw. Nennung ist keine Begründung erforderlich
begründen, nachweisen, zeigen	II, III	Sachverhalte, Aussagen sind durch logisches Schließen zu bestätigen. Die Art des Vorgehens ist frei wählbar, das Verfahren ist darzustellen. zu nutzen
berechnen	I, II	Ergebnisse von einem Ansatz ausgehend durch Rechenoperationen gewinnen
beschreiben	I, II	Strukturen, Sachverhalte, Verfahren unter Verwendung der Fachsprache angemessen wiedergeben, eine Begründung ist nicht notwendig.
bestimmen, ermitteln	I, II	Zusammenhänge bzw. Lösungswege finden und die Ergebnisse formulieren
beurteilen	II, III	Das zu fällende Urteil ist zu begründen
bewerten, deuten interpretieren	II, III	Die Deutung bzw. Interpretation stellt einen Zusammenhang her z. B. zwischen einer grafischen Darstellung, einem Term oder dem Ergebnis einer Rechnung und einem vorgegebenen Sachzusammenhang.
entscheiden	II, III	Sich bei Alternativen eindeutig und begründet auf eine Möglichkeit festlegen.
erläutern	I, II	Strukturen und Zusammenhänge erfassen, in Einzelheiten verdeutlichen und durch zusätzliche Informationen verständlich machen
herleiten, formulieren	II, III	Eine Formel oder einen Zusammenhang aus bekannten Sachverhalten nachvollziehbar entwickeln
skizzieren	I, II	Die Skizze ist so anzufertigen, dass sie wesentliche Eigenschaften von Sachverhalten oder Objekten beschreibt
untersuchen	I, II	Sachverhalte, Probleme, Fragestellungen nach bestimmten, fachlich üblichen bzw. sinnvollen Kriterien bearbeiten
vergleichen	I, II	Gemeinsamkeiten, Ähnlichkeiten und Unterschiede ermitteln
zeichnen, grafisch darstellen	I, II	hinreichend exakte graphische Darstellungen von Objekten oder Daten anfertigen
klassifizieren	II, III	eine Menge von Objekten nach vorgegebenen oder sinnvoll selbstständig zu wählenden Kriterien in Klassen einteilen

Operator	AFB	Erläuterung
bestätigen	I, II	Aussagen oder Sachverhalte mathematisch verifizieren
dokumentieren, darstellen	I, II	Gedankengang bzw. Herleitung der Problemlösung darlegen
veranschaulichen, verdeutlichen	I, II	Einen Sachverhalt mit verbalen oder graphischen Erläuterungen versehen
ergänzen	I, II	eine vorgegebene Rechnung, Grafik oder Tabelle vervollständigen
erklären	I, II	Sachverhalte mithilfe eigener Kenntnisse verständlich und nachvollziehbar machen und in Zusammenhänge einordnen
definieren	II, III	kontextabhängige, eigenständige Begriffe bzw. Darstellungen festlegen
erstellen	I, II	einen Sachverhalt in übersichtlicher, fachlich angemessener Form ausdrücken
analysieren	II, III	Sachverhalte, Probleme, Fragestellungen genauer untersuchen und strukturieren
vereinfachen, umformen	I, II	Terme, Aussagen, Formeln mittels geeigneter Strategien an den jeweiligen Sachverhalt anpassen
prüfen, überprüfen	II, III	die Gültigkeit einer Aussage, z. B. einer Hypothese oder einer Modellvorstellung, verifizieren, falsifizieren
übertragen	II, III	einen untersuchten Sachverhalt bzw. allgemeingültige Aussagen auf ähnliche Sachverhalte anwenden
entwickeln, entwerfen	II, III	Sachverhalte und Methoden zielgerichtet in einen Zusammenhang bringen, also eine Hypothese, eine Skizze oder ein Modell weiterführen und ausbauen

Die Verwendung eines Operators, der in der Übersicht nicht genannt wird, ist möglich, wenn aufgrund der standardsprachlichen Bedeutung dieses Operators in Verbindung mit der Aufgabenstellung davon auszugehen ist, dass die jeweilige Aufgabe im Sinne der Aufgabenstellung bearbeitet werden kann.

Grundsätzlich können sich alle Operatoren auf alle drei Anforderungsbereiche beziehen. Die Operatoren können durch **Zusätze** (z. B. „rechnerisch“ oder „grafisch“) konkretisiert werden.

Zugelassene Hilfsmittel dürfen zur Bearbeitung verwendet werden, sofern dem kein entsprechender Zusatz entgegensteht. Speziell kann bei der Verfügbarkeit von MMS (CAS) im Einzelfall die Darstellung eines Lösungswegs gefordert werden, der auch ohne den Einsatz dieser Technologien nachvollziehbar ist.

Teil B der Abiturprüfung mit Hilfsmittel, CAS

1 Analysis

Mathematische Formeln Wirtschaft und Verwaltung

Gesamtkostenfunktion K mit	$K(x) = K_v(x) + K_f$
Ertragsgesetzliche Kostenfunktion K mit	$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d; a > 0; x \geq 0$
K wächst degressiv	$K'(x) > 0 \wedge K''(x) < 0$
K wächst progressiv	$K'(x) > 0 \wedge K''(x) > 0$
Funktion der variablen Gesamtkosten	$K_v(x)$
Funktion der gesamten Stückkosten k	$k(x) = \frac{K(x)}{x}$
Funktion der variablen Stückkosten k_v (k_{var})	$k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x}$
Grenzkostenfunktion	$K'(x)$ Kostenzuwachs
Grenzstückkostenfunktion	$k'(x)$
Betriebsoptimum (Minimalstelle von k)	x_{BO}
Langfristige Preisuntergrenze	$k(x_{BO})$
Betriebsminimum (Minimalstelle von k_v)	x_{BM}
kurzfristige Preisuntergrenze	$k(x_{BM})$
Nachfragefunktion (Preis-Absatz-Funktion)	$p_N(x)$
Angebotsfunktion	$p_A(x)$
Gleichgewichtsmenge	x_G
(Schnittstelle von p_N und p_A)	
Gleichgewichtspreis	$p_G = p_N(x_G) = p_A(x_G)$
Marktgleichgewicht MG	$MG(x_G \mid p_G)$
Konsumentenrente	$KR = \int_0^{x_G} p_N(x) dx - x_G \cdot p_G$
Produzentenrente	$PR = x_G \cdot p_G - \int_0^{x_G} p_A(x) dx$
Erlösfunktion	$E(x) = p \cdot x; \quad p \text{ Preis pro ME}$ $E(x) = p_N(x) \cdot x$ $p_N(x)$; Preis abhängig von x
Gewinnfunktion	$G(x) = E(x) - K(x)$
Grenzgewinnfunktion	$G'(x)$
Gewinnschwelle	x_{GS} 1. positive Nullstelle von G
Gewinngrenze	x_{GG} 2. positive Nullstelle von G
gewinnmaximale Ausbringungsmenge	x_{max}
Maximalstelle von G(x)	
Cournot'scher Punkt	$C(x_{max} \mid p_N(x_{max}))$
Stückdeckungsbeitrag $d = dB$	$dB(x) = p - k_v(x)$
Deckungsbeitrag $D = DB$	$DB(x) = G(x) + K_f = E(x) - K_v(x)$

Bezeichnungen: $\mathbb{R}^* = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; $\mathbb{R}_+^* = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x > 0\} = \mathbb{R}^{>0}$

$$\mathbb{R}_+ = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0\} = \mathbb{R}^{\geq 0}$$

Produktregel der Ableitung: $f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$