

Gruber | Neumann

Erfolg im Mathe-Abi

Grundwissen
Hessen
Grundkurs

mit Tipps und Lösungen



Helmut Gruber, geb. 1968, studierte Mathematik und Physik in Konstanz und Freiburg und ist seit 1995 Mathematiklehrer in der Oberstufe.

Robert Neumann, geb. 1970, studierte Mathematik und Physik in Freiburg und unterrichtet Mathematik in der Oberstufe seit 1999.

Dieses Druckwerk wurde besonders nachhaltig produziert und ist mit dem europaweit geschützten Label **Books for Future** ausgezeichnet.



Insbesondere wurden bei dieser Produktion eingesetzt:

- * umweltzertifizierte Papiere aus nachhaltiger Forstwirtschaft oder Recyclingprozessen
- * schadstoff-freie Naturölfarben (kobaltfrei!)
- * recycling-optimierte Kaschierung des Umschlags (kein Verbundstoff)

© 2025 Freiburger Verlag GmbH, Freiburg im Breisgau

20. Auflage. Alle Rechte vorbehalten

Printed in EU

www.freiburger-verlag.de

Inhaltsverzeichnis

Analysis

1	Ableiten	9
1.1	Ganzrationale Funktionen	9
1.2	Exponentialfunktionen	10
1.3	Trigonometrische Funktionen	10
2	Stammfunktionen und Integrale	11
2.1	Stammfunktionen	11
2.2	Integrale	12
2.3	Integralgleichungen	12
2.4	Flächeninhalt zwischen zwei Kurven	12
3	Gleichungen	14
3.1	Potenzgleichungen	14
3.2	Potenzgleichungen mit Parameter	14
3.3	Exponentialgleichungen	15
3.4	Trigonometrische Gleichungen	16
4	Funktionen und Graphen	17
4.1	Von der Gleichung zur Kurve	17
4.2	Aufstellen von Funktionen mit Randbedingungen	19
4.3	Von der Kurve zur Gleichung	22
4.4	Graphen von f , f' und F	24
4.5	Kurvendiskussion	29
4.6	Extremwertaufgaben	33
4.7	Verständnis von Zusammenhängen	33

Geometrie

5 Punkte, Geraden und Ebenen	35
5.1 Lineare Gleichungssysteme	35
5.2 Rechnen mit Vektoren	35
5.3 Geraden	37
5.4 Ebenen	39
5.5 Gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen	43
6 Abstände, Winkel und Spiegelungen	45
6.1 Abstandsberechnungen	45
6.2 Winkelberechnungen	46
6.3 Spiegelungen	47

Stochastik

7 Wahrscheinlichkeitsrechnung	48
7.1 Baumdiagramme und Pfadregeln	48
7.2 Unabhängigkeit und Vierfeldertafeln	52
7.3 Bedingte Wahrscheinlichkeit	54
7.4 Binomialverteilung	56
7.5 Erwartungswert und Standardabweichung	60

Tipps	65
--------------	-----------

Lösungen	89
-----------------	-----------

Stichwortverzeichnis	183
-----------------------------	------------

Vorwort

Erfolg von Anfang an

...ist das Geheimnis eines guten Abiturs. Das vorliegende Übungsbuch ist speziell auf die grundlegenden Anforderungen des hilfsmittelfreien Teils (HMF) des Mathematik-Abiturs im Grundkurs in Hessen abgestimmt. Es umfasst die Bereiche Analysis, Geometrie und Stochastik.

Der hilfsmittelfreie Teil besteht aus mehreren kleinen Aufgaben, die ohne Taschenrechner und ohne Formelsammlung zu lösen sind. Genau hierfür wurde das vorliegende Buch konzipiert: Es fördert das Grundwissen und die Grundkompetenzen in Mathematik, vom einfachen Rechnen und Formelanwenden bis hin zum Verstehen von gedanklichen Zusammenhängen. Das Übungsbuch ist eine Hilfe zum Selbstlernen (learning by doing) und bietet die Möglichkeit, sich intensiv auf die Prüfung vorzubereiten und gezielt Themen zu vertiefen. Hat man Erfolg bei den grundlegenden Aufgaben, machen Mathematik und das Lernen mehr Spaß.

Wie arbeiten Sie mit diesem Buch?

Am Anfang jedes Kapitels finden Sie eine kurze Übersicht über die jeweiligen Themen. Die einzelnen Kapitel bauen zwar aufeinander auf, doch ist es nicht zwingend notwendig, das Buch der Reihe nach durchzuarbeiten. Die Aufgaben sind in der Regel in ihrer Schwierigkeit gestaffelt. Von fast jeder Aufgabe gibt es mehrere Variationen zum Vertiefen.

In der Mitte des Buches finden Sie den blauen Tippteil mit Denk- und Lösungshilfen.

Die Lösungen mit ausführlichen verständlichen Lösungswegen bilden den dritten Teil des Übungsbuchs. Hier finden Sie die notwendigen Formeln, Rechenverfahren und Denkschritte sowie manchmal alternative Lösungswege.

Der blaue Tippteil

Hat man keine Idee, wie man eine Aufgabe angehen soll, hilft der blaue Tippteil zwischen Aufgaben und Lösungen weiter: Zu jeder Aufgabe gibt es dort Tipps, die helfen, einen Ansatz zu finden, ohne die Lösung vorwegzunehmen.

Die Kontrollkästchen



Damit Sie immer den Überblick behalten können, welche Aufgaben Sie schon bearbeitet haben, befindet sich neben jedem Aufgabentitel ein Kontrollkästchen zum Abhaken.

Der Ablauf der Abiturprüfung

Die Abiturprüfung besteht aus zwei Teilen:

Prüfungsteil 1: Hilfsmittelfreier Prüfungsteil (Erlaubte Hilfsmittel: Ein Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung und eine Liste der fachspezifischen Operatoren)

Prüfungsteil 2: Aufgaben differenziert nach Rechnertechnologie (Erlaubte Hilfsmittel: Ein Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung, ein wissenschaftlich-technischer Taschenrechner oder ein CAS, eine gedruckte Formelsammlung sowie eine Liste der fachspezifischen Operatoren)

Prüfungsteil 1 (maximal 100 Minuten)

Analysis	Lineare Algebra/ Analytische Geometrie	Stochastik
A (HMF)		
25 BE		

Prüfungsteil 2

Analysis B 1 25 BE	oder	Analysis B 2 25 BE
Lineare Algebra Analytische Geometrie C 15 BE		
Stochastik D 15 BE		

Die gesamte Prüfungszeit beträgt 285 Minuten, d.h. 4 Stunden und 45 Minuten.

Die Ermittlung der Notenpunkte

Insgesamt können maximal 80 Bewertungseinheiten (BE) in der Prüfung erzielt werden, davon 25 BE im Teil A (HMF) und 55 BE im Teil B.

Aus den Bewertungseinheiten ergeben sich folgende Notenpunkte:

Bewertungseinheiten	Notenpunkte	Note
0 - 15	0	ungenügend
16 - 21	1	mangelhaft
22 - 26	2	
27 - 31	3	
32 - 35	4	ausreichend
36 - 39	5	
40 - 43	6	
44 - 47	7	befriedigend
48 - 51	8	
52 - 55	9	
56 - 59	10	gut
60 - 63	11	
64 - 67	12	
68 - 71	13	sehr gut
72 - 75	14	
76 - 80	15	

Allen SchülerInnen, die sich auf das Abitur vorbereiten, wünschen wir viel Erfolg.

Helmut Gruber, Robert Neumann

2 Stammfunktionen und Integrale □

Tipps ab Seite 65, Lösungen ab Seite 91

Für eine Stammfunktion F einer Funktion f gilt: $F'(x) = f(x)$.

Das Bilden einer Stammfunktion kann man daher als die Umkehrung des Ableitens bezeichnen. Die Stammfunktion ist nur bis auf die Konstante c bestimmt, da diese beim Ableiten wieder wegfällt. Folgende Stammfunktionen werden häufig benötigt:

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$x^n; n \neq -1$	$\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c$	$a \cdot x^n; n \neq -1$	$\frac{1}{n+1} \cdot a \cdot x^{n+1} + c$
e^x	$e^x + c$	$a \cdot e^{k \cdot x + b}$	$\frac{a}{k} \cdot e^{k \cdot x + b} + c$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$	$a \cdot \sin(b \cdot x)$	$-\frac{a}{b} \cdot \cos(b \cdot x) + c$
$\cos(x)$	$\sin(x) + c$	$a \cdot \cos(b \cdot x)$	$\frac{a}{b} \cdot \sin(b \cdot x) + c$

2.1 Stammfunktionen □

Geben Sie je eine Stammfunktion für alle folgenden Funktionen an.

2.1.1 Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten □

- a) $f(x) = 2x^3 - \frac{4}{3}x^2 + 2$ b) $f(x) = 10x^4 + 2x^3 - x$ c) $f(x) = 3x^3 - 4x$
 d) $f_a(x) = 4ax^3 - 3ax^2$ e) $f_t(x) = 2tx^2 - t^2x + 1$

2.1.2 Exponentialfunktionen □

- a) $f(x) = 3e^{2x}$ b) $f(x) = 4e^{-x}$ c) $f(x) = 3 \cdot e^{-3x} + x^3$
 d) $f(x) = 6 \cdot e^{3x+2}$ e) $f(x) = 2(x^2 - 6e^{3x})$ f) $f(x) = 2 \cdot e^{-2x} + \frac{1}{x^2}$

2.1.3 Trigonometrische Funktionen □

- a) $f(x) = 3 \cdot \cos(2x + 1)$ b) $f(x) = 4 \cdot \sin(-3x + 2)$ c) $f(x) = \frac{2}{3} \cdot \cos(\pi x)$
 d) $f(x) = 4 \cdot \cos(4x + 4)$ e) $f(x) = 3 \cdot \sin(3x - 9)$

2.2 Integrale



Berechnen Sie folgende Integrale:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 \cdot \sin(2x)) \, dx$

b) $\int_{-1}^0 (1 + e^{-x}) \, dx$

c) $\int_1^2 \left(1 + \frac{3}{x^2}\right) \, dx$

d) $\int_0^1 (2x^3 + 1) \, dx$

e) $\int_1^3 (6x^2 + 2x) \, dx$

f) $\int_0^2 (2x - 2e^{-2x}) \, dx$

2.3 Integralgleichungen



a) Bestimmen Sie $u > 0$ so, dass gilt: $\int_0^u \frac{1}{2}x^2 \, dx = \frac{9}{2}$.

b) Bestimmen Sie $u > 0$ so, dass gilt: $\int_1^u x^4 \, dx = \frac{31}{5}$.

c) Bestimmen Sie $u > 0$ so, dass gilt: $\int_0^u 2e^x \, dx = 1$.

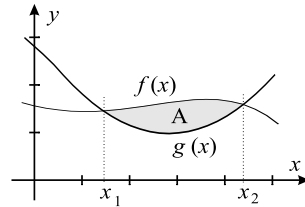
2.4 Flächeninhalt zwischen zwei Kurven



Um den Flächeninhalt zwischen zwei Kurven zu bestimmen, berechnet man das Integral der Differenz der Funktionen über dem Intervall der beiden Schnittstellen. Dabei gilt «obere Kurve minus untere Kurve»:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x)) \, dx$$

Sind die Schnittstellen x_1 und x_2 nicht bekannt, müssen diese zuerst bestimmt werden.



Berechnen Sie jeweils den Flächeninhalt zwischen den zwei Kurven:

a) $f(x) = x + 1$

b) $f(x) = 4 - x^2$

c) $f(x) = 2 \cdot \sin(x)$

$g(x) = x^2 + 1$

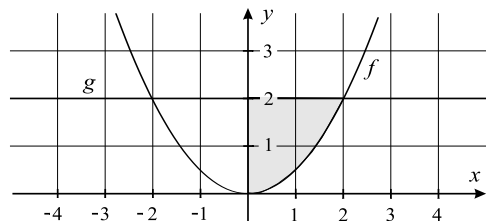
$g(x) = x^2 - 4$

$g(x) = -\sin(x) \quad x \in [0; \pi]$

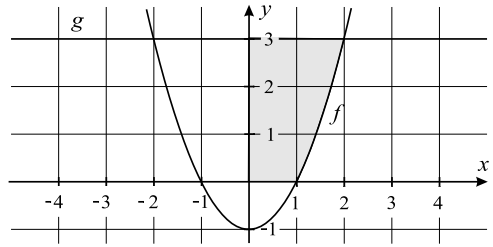
Tipp: Machen Sie sich eine Skizze der beiden Graphen.

- d) Gegeben sind die Gerade g mit der Gleichung $y = 2$ und die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^2$.

Berechnen Sie den Flächeninhalt der schraffierten Fläche.



- e) Gegeben sind die Gerade g mit der Gleichung $y = 3$ und die Funktion f mit $f(x) = x^2 - 1$. Berechnen Sie den Flächeninhalt der schraffierten Fläche.



Tipps – Analysis

1 Ableiten

1.1 Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten

- a) - c) Verwenden Sie die Potenzregel $(a \cdot x^n)' = a \cdot n \cdot x^{n-1}$.
- d) - e) Wenden Sie die Kettenregel an: $(u(v(x)))' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$ (äußere Ableitung mal innere Ableitung).
- f) - g) Wenden Sie die Produktregel $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$ und die Kettenregel (äußere Ableitung mal innere Ableitung) an.
- h) - i) Verwenden Sie die Potenzregel $(a \cdot x^n)' = a \cdot n \cdot x^{n-1}$.

1.2 Exponentialfunktionen

- a) - d) Verwenden Sie zuerst die Produktregel und dann die Kettenregel.
- e) - f) Verwenden Sie die Kettenregel, teilweise mehrfach.

1.3 Trigonometrische Funktionen

- a) - b) Verwenden Sie die Kettenregel.
- c) - e) Verwenden Sie die Produktregel und teilweise die Kettenregel.

2 Stammfunktionen und Integrale

2.1 Stammfunktionen

2.1.1 Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten

- a) - e) Benutzen Sie die Integrationsregel für Potenzfunktionen: Besitzt f die Form $f(x) = a \cdot x^n$, dann ist $F(x) = a \cdot \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$; $n \neq -1$ eine Stammfunktion.

2.1.2 Exponentialfunktionen

- a) - d) Für verkettete (verschachtelte) Funktionen mit innerem *linearen* Ausdruck gilt die Integrationsregel für lineare Integration:
«Äußere Stammfunktion geteilt durch innere Ableitung».
Bei einer e -Funktion mit $f(x) = a \cdot e^{k \cdot x + b}$ ist $e^{(\dots)}$ die äußere Funktion und $k \cdot x + b$ die innere Funktion. Der Parameter a verändert sich nicht beim Integrieren.
- e) Lösen Sie zunächst die Klammer auf und verwenden Sie die Integrationsregeln für Potenzfunktionen bzw. lineare Integration.
- f) Schreiben Sie den Bruch als Potenz mit negativem Exponenten und verwenden Sie die Integrationsregeln für Potenzfunktionen bzw. lineare Integration.

2.1.3 Trigonometrische Funktionen

- a) - e) Beachten Sie, dass $\sin(x)$ eine Stammfunktion von $\cos(x)$ und $-\cos(x)$ eine Stammfunktion von $\sin(x)$ ist.

Auch bei diesen Aufgaben gilt die Regel für verkettete Funktionen mit innerem *linearen* Ausdruck:

«Äußere Stammfunktion geteilt durch innere Ableitung».

Ist $f(x) = a \cdot \sin(bx + c)$, so ist $\sin(\dots)$ die äußere Funktion und $bx + c$ die innere Funktion. Der Parameter a verändert sich nicht beim Integrieren.

2.2 Integrale

- a) - f) Verwenden Sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \text{ wobei } F \text{ eine Stammfunktion von } f \text{ ist.}$$

Verwenden Sie die Regeln für die Stammfunktionen (siehe die Tipps zu 2.1).

2.3 Integralgleichungen

- a) - c) Verwenden Sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \text{ wobei } F \text{ eine Stammfunktion von } f \text{ ist. Lösen Sie die entstandene Gleichung durch Wurzelziehen oder Logarithmieren nach } u \text{ auf.}$$

2.4 Flächeninhalt zwischen zwei Kurven

- a) - d) Bestimmen Sie jeweils die Integrationsgrenzen durch Gleichsetzen der Funktionsterme. Prüfen Sie, welche Kurve die obere Kurve ist. Stellen Sie nun ein Integral auf und wenden Sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung an: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.
- e) Den Inhalt A der markierten Fläche erhalten Sie, indem Sie die markierte Fläche in zwei Teilflächen A_1 und A_2 aufteilen. Die Teilfläche A_1 ist ein Rechteck, dessen Flächeninhalt Sie mit der Formel $A_1 = a \cdot b$ berechnen. Die Seiten a und b des Rechtecks erhalten Sie, indem Sie die positive Schnittstelle der Geraden mit der Gleichung $y = 3$ und dem Graphen von f durch Gleichsetzen der Funktionsgleichungen bestimmen. Die Fläche A_2 wird durch die Gerade und dem Graphen von f begrenzt. Den Flächeninhalt von A_2 erhalten Sie mit Hilfe eines Integrals. Verwenden Sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Addieren Sie die beiden Flächeninhalte der Teilflächen.

3 Gleichungen

3.1 Potenzgleichungen

- a) - b) Verwenden Sie die pq- bzw. abc-Formel.

2 Stammfunktionen und Integrale

2.1 Stammfunktionen

2.1.1 Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten

$$a) F(x) = \frac{2}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x + c = \frac{1}{2}x^4 - \frac{4}{9}x^3 + 2x + c$$

$$b) F(x) = \frac{10}{5}x^5 + \frac{2}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + c = 2x^5 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + c$$

$$c) F(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{4}{2}x^2 + c = \frac{3}{4}x^4 - 2x^2 + c$$

$$d) F_a(x) = \frac{4a}{4}x^4 - \frac{3a}{3}x^3 + c = ax^4 - ax^3 + c$$

$$e) F_t(x) = \frac{2t}{3}x^3 - \frac{t^2}{2}x^2 + x + c$$

2.1.2 Exponentialfunktionen

$$a) \text{ Lineare Integration: } F(x) = \frac{3}{2}e^{2x} + c$$

$$b) \text{ Lineare Integration: } F(x) = 4 \cdot \frac{e^{-x}}{-1} + c = -4e^{-x} + c$$

$$c) \text{ Lineare Integration: } F(x) = 3 \cdot \frac{e^{-3x}}{-3} + \frac{1}{4}x^4 + c = -e^{-3x} + \frac{1}{4}x^4 + c$$

$$d) \text{ Lineare Integration: } F(x) = 6 \cdot \frac{e^{3x+2}}{3} + c = 2e^{3x+2} + c$$

$$e) \text{ Zuerst wird die Klammer aufgelöst: } f(x) = 2x^2 - 12e^{3x}, \text{ daraus folgt:}$$

$$F(x) = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^3 - 12 \cdot \frac{1}{3} \cdot e^{3x} + c = \frac{2}{3}x^3 - 4e^{3x} + c$$

$$f) \text{ Zuerst wird der Bruch als Potenz mit negativem Exponenten geschrieben:}$$

$$f(x) = 2 \cdot e^{-2x} + x^{-2}, \text{ daraus folgt:}$$

$$F(x) = 2 \cdot \frac{e^{-2x}}{-2} + \frac{1}{-1}x^{-1} + c = -e^{-2x} - \frac{1}{x} + c$$

2.1.3 Trigonometrische Funktionen

$$a) \text{ Lineare Integration: } F(x) = 3 \cdot \frac{\sin(2x+1)}{2} + c = \frac{3}{2} \sin(2x+1) + c$$

$$b) \text{ Lineare Integration: } F(x) = 4 \cdot \frac{-\cos(-3x+2)}{-3} + c = \frac{4}{3} \cos(-3x+2) + c$$

$$c) \text{ Lineare Integration: } F(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin(\pi x)}{\pi} + c = \frac{2}{3\pi} \sin(\pi x) + c$$

$$d) \text{ Lineare Integration: } F(x) = 4 \cdot \frac{\sin(4x+4)}{4} + c = \sin(4x+4) + c$$

$$e) \text{ Lineare Integration: } F(x) = 3 \cdot \frac{-\cos(3x-9)}{3} + c = -\cos(3x-9) + c$$

2.2 Integrale

Mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 \cdot \sin(2x)) dx &= \left[-\frac{4}{2} \cdot \cos(2x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = [-2 \cdot \cos(2x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = -2 \cdot \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) - (-2 \cdot \cos(2 \cdot 0)) \\ &= -2 \cdot (-1) - (-2) = 4 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \int_{-1}^0 (1 + e^{-x}) dx = [x - e^{-x}]_{-1}^0 = 0 - e^{-0} - (-1 - e^{-(-1)}) = -1 + 1 + e = e$$

$$\text{c) } \int_1^2 \left(1 + \frac{3}{x^2}\right) dx = \int_1^2 (1 + 3 \cdot x^{-2}) dx = \left[x + \frac{3}{-1} x^{-1}\right]_1^2 = \left[x - \frac{3}{x}\right]_1^2 = 2 - \frac{3}{2} - \left(1 - \frac{3}{1}\right) = 2,5$$

$$\text{d) } \int_0^1 (2x^3 + 1) dx = \left[\frac{2}{4}x^4 + x\right]_0^1 = \left(\frac{2}{4} \cdot 1^4 + 1\right) - \left(\frac{2}{4} \cdot 0^4 + 0\right) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \int_1^3 (6x^2 + 2x) dx &= \left[\frac{6}{3}x^3 + \frac{2}{2}x^2\right]_1^3 = [2x^3 + x^2]_1^3 \\ &= (2 \cdot 3^3 + 3^2) - (2 \cdot 1^3 + 1^2) = (54 + 9) - (2 + 1) = 60 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \int_0^2 (2x - 2e^{-2x}) dx &= \left[x^2 - \frac{2}{-2}e^{-2x}\right]_0^2 = [x^2 + e^{-2x}]_0^2 = (2^2 + e^{-2 \cdot 2}) - (0^2 + e^{-2 \cdot 0}) \\ &= 4 + e^{-4} - 1 = 3 + e^{-4} \end{aligned}$$

2.3 Integralgleichungen

- a) Mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung kann man die Gleichung durch Wurzelziehen nach u auflösen:

$$\begin{aligned} \int_0^u \frac{1}{2} x^2 dx &= \frac{9}{2} \\ \left[\frac{1}{6} x^3\right]_0^u &= \frac{9}{2} \\ \frac{1}{6} u^3 - \frac{1}{6} \cdot 0^3 &= \frac{9}{2} \\ \frac{1}{6} u^3 &= \frac{9}{2} \\ u^3 &= 27 \\ u &= 3 \end{aligned}$$

- b) Mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung kann man die Gleichung durch Wurzelziehen nach u auflösen:

$$\begin{aligned}\int_1^u x^4 dx &= \frac{31}{5} \\ \left[\frac{1}{5} x^5 \right]_1^u &= \frac{31}{5} \\ \frac{1}{5} u^5 - \frac{1}{5} \cdot 1^5 &= \frac{31}{5} \\ \frac{1}{5} u^5 - \frac{1}{5} &= \frac{31}{5} \\ u^5 - 1 &= 31 \\ u^5 &= 32 \\ u &= 2\end{aligned}$$

- c) Mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung kann man die Gleichung durch Logarithmieren nach u auflösen:

$$\begin{aligned}\int_0^u 2e^x dx &= 1 \\ \left[2e^x \right]_0^u &= 1 \\ 2e^u - (2e^0) &= 1 \\ 2e^u - 2 &= 1 \\ 2e^u &= 3 \\ e^u &= \frac{3}{2} \\ u &= \ln\left(\frac{3}{2}\right)\end{aligned}$$

2.4 Flächeninhalt zwischen zwei Kurven

- a) Schnittstellen bestimmen durch Gleichsetzen und Ausklammern:

$$x - x^2 = 0 \Rightarrow x \cdot (1 - x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1$$

Obere Kurve: $f(x)$ (z.B. durch Einsetzen für $x = \frac{1}{2}$)

$$\begin{aligned}A &= \int_0^1 (x + 1 - (x^2 + 1)) dx \\ &= \int_0^1 (-x^2 + x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{6} \text{ FE}\end{aligned}$$

- b) Schnittpunkte bestimmen durch Gleichsetzen und Wurzelziehen: $x_1 = -2, x_2 = 2$
 Obere Kurve: $f(x)$ (nach unten geöffnete Parabel).

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-2}^2 (4 - x^2 - (x^2 - 4)) \, dx \\
 &= \int_{-2}^2 (-2x^2 + 8) \, dx \\
 &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 8x \right]_{-2}^2 \\
 &= -\frac{16}{3} + 16 - \left(+\frac{16}{3} - 16 \right) \\
 &= 32 - \frac{32}{3} \\
 &= \frac{64}{3} \\
 &= 21,33 \text{ FE}
 \end{aligned}$$

- c) Gesucht ist die Fläche im Intervall $I = [0; \pi]$. Schnittpunkte bestimmen durch Gleichsetzen: $2 \cdot \sin(x) = -\sin(x) \Rightarrow 3 \cdot \sin(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \pi$
 Obere Kurve: $f(x)$, (da $2 \sin(x) \geq 0$ und $-\sin(x) \leq 0$ im Intervall I gilt)

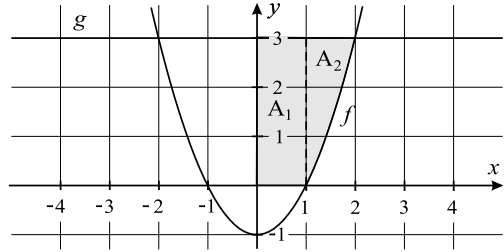
$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^\pi (2 \cdot \sin(x) - (-\sin(x))) \, dx \\
 &= \int_0^\pi (3 \cdot \sin(x)) \, dx \\
 &= \left[-3 \cdot \cos(x) \right]_0^\pi \\
 &= -3 \cdot \cos \pi - (-3 \cdot \cos 0) \\
 &= -3 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \\
 &= 6 \text{ FE}
 \end{aligned}$$

- d) Gesucht ist die Fläche im Intervall $I = [0; 2]$. Schnittpunkt bestimmen: $2 = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow x = 2$
 Obere Kurve: Gerade g

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^2 \left(2 - \frac{1}{2}x^2 \right) \, dx \\
 &= \left[2 \cdot x - \frac{1}{6}x^3 \right]_0^2 \\
 &= 2 \cdot 2 - \frac{1}{6} \cdot 2^3 - \left(2 \cdot 0 - \frac{1}{6} \cdot 0^3 \right) \\
 &= 4 - \frac{8}{6} = \frac{8}{3} \text{ FE}
 \end{aligned}$$

- e) Den Inhalt A der markierten Fläche erhält man, indem man die markierte Fläche in zwei Teilflächen A_1 und A_2 aufteilt.

Der Graph von f schneidet die x -Achse bei $x = 1$, da $f(1) = 1^2 - 1 = 0$.



Die Schnittstelle der Geraden mit der Gleichung $y = 3$ und dem Graphen von f erhält man durch Gleichsetzen:

$$\begin{aligned}x^2 - 1 &= 3 \\x^2 &= 4 \\x_{1,2} &= \pm 2\end{aligned}$$

Wegen $x > 0$ kommt nur $x_1 = 2$ als Schnittstelle in Frage.

Die Fläche A_1 ist ein Rechteck mit den Seiten $a = 1$ und $b = 3$.

Damit gilt:

$$A_1 = a \cdot b = 1 \cdot 3 = 3$$

Die Fläche A_2 wird durch die Gerade g und dem Graph von f begrenzt. Den Flächeninhalt A_2 erhält man mit Hilfe eines Integrals. Da die Gerade g oberhalb des Graphen von f verläuft, gilt:

$$\begin{aligned}A_2 &= \int_1^2 (3 - f(x)) \, dx \\&= \int_1^2 (3 - (x^2 - 1)) \, dx \\&= \int_1^2 (4 - x^2) \, dx \\&= \left[4x - \frac{1}{3}x^3 \right]_1^2 \\&= 4 \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot 2^3 - \left(4 \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 1^3 \right) \\&= 8 - \frac{8}{3} - 4 + \frac{1}{3} \\&= 4 - \frac{7}{3} = \frac{5}{3}\end{aligned}$$

Damit erhält man für den Flächeninhalt der markierten Fläche:

$$A = A_1 + A_2 = 3 + \frac{5}{3} = \frac{14}{3}$$

Der Flächeninhalt beträgt $\frac{14}{3}$ FE.

Stichwortverzeichnis

- abc-Formel, 14
- Ableiten, 9
- Abstand
 - Gerade - Ebene, 45
 - paralleler Ebenen, 45
 - Punkt - Ebene, 45
- Baumdiagramm, 48
- Bernoulliexperiment, 56
- Binomialverteilung, 56
- Ebenen
 - gegenseitige Lage, 43
- Ereignisse
 - unabhängige, 52
- Erwartungswert, 60
- Exponentialfunktionen
 - aufstellen mit Randbedingung, 20
 - bestimmen des Schaubildes, 18
 - differenzieren, 10
 - integrieren, 11
- Exponentialgleichungen, 15
- Extremwertaufgaben, 33
- Fläche
 - zwischen zwei Kurven, 12
- Funktionen
 - bestimmen aus dem Schaubild, 22
- Funktionenscharen
 - ganzrationale Funktionen, 31
- Ganzrationale Funktionen
 - aufstellen mit Randbedingungen, 20
 - bestimmen des Funktionsterms, 22
- Geraden
 - gegenseitige Lage, 38
 - Punktprobe, 38, 42
- Glücksrad, 62
- Gleichungen
 - höherer Ordnung, 14
 - trigonometrische, 16
- Integralfunktion, 12
- Integration
 - Flächeninhalt, 12
 - Stammfunktionen, 11
- Kettenlänge, 62
- Koordinatenform der Ebenengleichung, 41
- Kosinus
 - Gleichung, 16
- Kreuzprodukt, 40
- Kurvendiskussion, 29
- Monotonie, 25, 27
- Multiplikationssatz, 52
- Normale, 31
- Orthogonalität
 - von Kurven, 31
 - von Vektoren, 37

- Parallelogramm, 36
- Parameter
 - Funktionen mit Parameter, 31
- Parameterform der Ebenengleichung, 41
- Pfadregeln, 48
- Potenzfunktionen
 - integrieren, 11
- pq-Formel, 14
- Sattelpunkt, 29, 30
- Satz vom Nullprodukt, 14
- Schaubilder, 17
- Sinus
 - Gleichung, 16
- Sinusfunktion
 - aufstellen mit Randbedingung, 21
 - bestimmen des Funktionsterms, 23
 - differenzieren, 10
- Skalarprodukt, 36
- Spiegelebene, 42
- Spiegelungen
 - Punkt an Ebene, 47
 - Punkt an Punkt, 47
- Spurpunkt, 42
- Stammfunktion, 11, 28
- Symmetrie, 30
- Tangente, 31
- Trigonometrische Funktionen
 - aufstellen mit Randbedingung, 21
 - bestimmen des Funktionsterms, 23
 - bestimmen des Schaubildes, 18
 - differenzieren, 10
 - integrieren, 11
- Vektoren
 - Addition und Subtraktion, 36
 - Orthogonalität, 37
- Vektorprodukt, 40
- Windschiefe Geraden, 38
- Winkel
 - zwischen Ebenen, 47
 - zwischen Gerade und Ebene, 47
 - zwischen Vektoren und Geraden, 46
- Ziehen mit Zurücklegen, 48
- Ziehen ohne Zurücklegen, 49
- Zielfunktion, 33