Gruber I Neumann

# Erfolg im Mathe-Abi 2026

Prüfungsaufgaben
Grundkurs Hessen

mit Tipps und Lösungen

Freiburger Verlag

Helmut Gruber, geb. 1968, studierte Mathematik und Physik in Konstanz und Freiburg und ist seit 1995 Mathematiklehrer in der Oberstufe.

Robert Neumann, geb. 1970, studierte Mathematik und Physik in Freiburg und unterrichtet Mathematik in der Oberstufe seit 1999.

Dieses Druckwerk wurde besonders nachhaltig produziert und ist mit dem europaweit geschützten Label **Books for Future** ausgezeichnet.

Books for Future®
umweltfreundliche Bücher aus Wertstoffkreisläufen
49/001/007/25
www.books-for-future.de

Insbesondere wurden bei dieser Produktion eingesetzt:

* umweltzertifizierte Papiere aus nachhaltiger Forstwirtschaft oder Recyclingprozessen
* schadstoff-freie Naturölfarben (kobaltfrei!)
* recycling-optimierte Kaschierung des Umschlags (kein Verbundstoff)


Printed in EU
www.freiburger-verlag.de

# Inhaltsverzeichnis

# Erfolg von Anfang an

Dieses Übungsbuch ist speziell auf die Anforderungen des zentralen Mathematik-Abiturs im Grundkurs in Hessen abgestimmt. Es enthält die Original-Prüfungsaufgaben mit vielen hilfreichen Tipps und ausführlichen, verständlichen Lösungen. Es umfasst die drei großen Themenbereiche Analysis, Lineare Algebra/ Analytische Geometrie und Stochastik. Thematisch geht es meistens um anwendungsbezogene Aufgaben, um das Modellieren realitätsnaher Problemstellungen, um das Herstellen von Zusammenhängen und um das Entwickeln von Lösungsstrategien.

In diesem Buch finden Sie die **angepassten Abituraufgaben** der letzten Jahre, da sich die Verteilung der Bewertungseinheiten geändert hat.

Bitte beachten Sie, dass seit dem Abitur 2024 keine Auswahl mehr bei der Analytischen Geometrie und Stochastik mehr möglich ist. Es sind **beide** Themen zu bearbeiten, d.h. eine C-Aufgabe und eine D-Aufgabe.

## Der blaue Tippteil

Hat man keine Idee, wie man eine Aufgabe angehen soll, hilft der blaue Tippteil in der Mitte des Buches weiter: Zu jeder Aufgabe gibt es dort Tipps, die helfen, einen Ansatz zu finden, ohne die Lösung vorwegzunehmen.

## Die Kontrollkästchen ☐

Damit Sie immer den Überblick behalten können, welche Aufgaben Sie schon bearbeitet haben, befindet sich neben jedem Aufgabentitel ein Kontrollkästchen zum Abhaken.

## Taschenrechner

Je nachdem, welcher Operator in einer Aufgabe angegeben ist, kann man den Taschenrechner verwenden. Bei «berechnen Sie» ist ein ausführlicher Lösungsweg «von Hand» ohne Taschenrechner verlangt, bei «bestimmen Sie» oder «geben Sie an» sollen die Funktionen des Taschenrechners genutzt werden.

An Stellen, an denen es Sinn macht, die entsprechende Funktion des Taschenrechners zu nutzen, befindet sich im Buch ein QR-Code und ein Direktlink auf das entsprechende Video, in dem diese Funktion des Tachenrechners kurz erklärt wird. Der QR-Code kann mit einer entsprechenden App gescannt werden. Alternativ lässt sich auch der Link unter dem Code benutzen.

Der Code neben diesem Text verweist beispielsweise auf ein Video zur Bestimmung der kumulierten Binomialverteilung.

frv.tv/ck

## Weitere Übungsaufgaben auf Prüfungsniveau

Im Internet finden Sie unter www.frv-online.de weitere Aufgaben mit Tipps und ausführlichen Lösungen.

# Der Ablauf der Abiturprüfung

Die Abiturprüfung besteht aus zwei Teilen:

Prüfungsteil 1: Hilfsmittelfreier Prüfungsteil (Erlaubte Hilfsmittel: Ein Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung und eine Liste der fachspezifischen Operatoren)

Prüfungsteil 2: Aufgaben differenziert nach Rechnertechnologie (Erlaubte Hilfsmittel: Ein Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung, ein wissenschaftlich-technischer Taschenrechner oder ein CAS, eine gedruckte Formelsammlung sowie eine Liste der fachspezifischen Operatoren)

**Prüfungsteil 1 (maximal 100 Minuten)**

Analysis Lineare Algebra/ Analytische Geometrie Stochastik

A (HMF)

25 BE

**Prüfungsteil 2**

| Analysis | | Analysis |
|---|---|---|
| B 1 | oder | B 2 |
| 25 BE | | 25 BE |

Lineare Algebra
Analytische Geometrie

C

15 BE

Stochastik

D

15 BE

Die gesamte Prüfungszeit beträgt 285 Minuten, d.h. 4 Stunden und 45 Minuten.

## Die Ermittlung der Notenpunkte

Insgesamt können maximal 80 Bewertungseinheiten (BE) in der Prüfung erzielt werden, davon 25 BE im Teil A (HMF) und 55 BE im Teil B.
Aus den Bewertungseinheiten ergeben sich folgende Notenpunkte:

| Bewertungseinheiten | Notenpunkte | Note |
|---|---|---|
| 0 - 15 | 0 | ungenügend |
| 16 - 21 | 1 | mangelhaft |
| 22 - 26 | 2 | |
| 27 - 31 | 3 | |
| 32 - 35 | 4 | ausreichend |
| 36 - 39 | 5 | |
| 40 - 43 | 6 | |
| 44 - 47 | 7 | befriedigend |
| 48 - 51 | 8 | |
| 52 - 55 | 9 | |
| 56 - 59 | 10 | gut |
| 60 - 63 | 11 | |
| 64 - 67 | 12 | |
| 68 - 71 | 13 | sehr gut |
| 72 - 75 | 14 | |
| 76 - 80 | 15 | |

Allen SchülerInnen, die sich auf das Abitur vorbereiten, wünschen wir viel Erfolg.

Helmut Gruber, Robert Neumann

# 1 Abitur 2021

*Tipps ab Seite 77, Lösungen ab Seite 106* ☐

**Landesabitur 2021 Mathematik Grundkurs**
**Prüfungsteil 1 (hilfsmittelfreier Teil) – Vorschlag A**

Aus den Wahlaufgaben zu Niveau 1 (Aufgabe 4, 5 und 6) und Niveau 2 (Aufgabe 7, 8 und 9) muss **jeweils eine** Aufgabe durch Ankreuzen ausgewählt werden. Nur die ausgewählten Wahlaufgaben (und die Pflichtaufgaben) werden bewertet.
Ich wähle verbindlich aus:
Niveau 1: ☐4 ☐5 ☐6 (ein Kreuz)
Niveau 2: ☐7 ☐8 ☐9 (ein Kreuz)
Unterschrift des Prüflings: ____________________

## Pflichtaufgaben (Niveau 1)

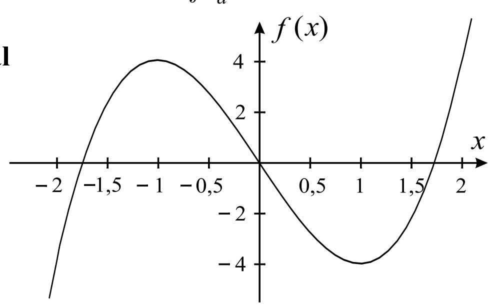
**1 Analysis (Pflichtaufgabe – Niveau 1)**

Gegeben ist die Funktion $f$ mit $f(x) = 2x^3 - 6x$. Der Graph von $f$ ist in der Abbildung im Material dargestellt.

1.1 Berechnen Sie $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ und begründen Sie mithilfe der Abbildung, warum der Wert dieses Integrals negativ ist. **(4 BE)**

1.2 Geben Sie den Wert des Integrals $\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x$ an. **(1 BE)**

**Material**




**2 Lineare Algebra / Analytische Geometrie (Pflichtaufgabe – Niveau 1)**

Gegeben ist das Dreieck ABC mit den Punkten A$(2 \mid 3 \mid -4)$, B$(-1 \mid 1 \mid 0)$ und C$(2 \mid 1 \mid -4)$.

2.1 Zeigen Sie rechnerisch, dass das Dreieck im Punkt C einen rechten Winkel hat. **(3 BE)**

2.2 Berechnen Sie den Flächeninhalt der Dreiecksfläche. **(2 BE)**

**3 Stochastik (Pflichtaufgabe – Niveau 1)**

Feline besitzt eine Kiste mit den sechs gleichartigen Kugeln ①❷❸④❺❻ und führt zwei verschiedene Experimente durch.

3.1 Sie zieht zweimal hintereinander zufällig eine Kugel und legt jede Kugel nach dem Zug wieder zurück in die Kiste. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis

A: Mindestens eine Kugel ist mit einer geraden Zahl beschriftet. **(2 BE)**

3.2 Sie zieht dreimal hintereinander zufällig eine Kugel, ohne diese zurückzulegen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis
B: Unter den gezogenen Kugeln ist genau eine weiße Kugel. **(3 BE)**

## Wahlaufgaben (Niveau 1)

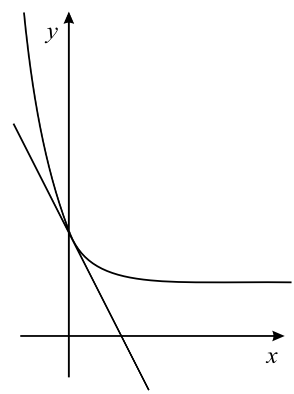
Wählen Sie **eine** der drei folgenden Wahlaufgaben 4, 5 und 6 aus.

**4 Analysis (Wahlaufgabe – Niveau 1)**

Gegeben ist die Funktion $f$ mit $f(x) = e^{-2x} + 1$. Die Abbildung zeigt den Graphen $G_f$ sowie die Tangente an $G_f$ an der Stelle $x_1 = 0$.

4.1 Weisen Sie nach, dass diese Tangente die Steigung $-2$ hat. **(2 BE)**

4.2 Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, das diese Tangente mit den Koordinatenachsen einschließt. **(3 BE)**




**5 Lineare Algebra / Analytische Geometrie (Wahlaufgabe – Niveau 1)**

Gegeben sind die Geraden $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und

$h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R}$.

5.1 Untersuchen Sie die gegenseitige Lage von $g$ und $h$. **(3 BE)**

5.2 Die Ebene E enthält den Punkt $P(5 \mid 7 \mid 3)$ und ist orthogonal zu $g$.
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von E. **(2 BE)**

# Tipps

## Das Vektorprodukt

Wenn man einen Vektor $\vec{n}$ sucht, der senkrecht auf zwei gegebenen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht (der Normalenvektor), geschieht dies einfach und schnell mit dem Vektorprodukt:

$$\vec{n} = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \begin{pmatrix} a_2b_3 & - & a_3b_2 \\ a_3b_1 & - & a_1b_3 \\ a_1b_2 & - & a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Die Merkhilfe dazu:

1. Beide Vektoren werden je zweimal untereinandergeschrieben, dann werden die erste und die letzte Zeile gestrichen.
2. Anschließend wird «über Kreuz» multipliziert. Dabei erhalten die abwärts gerichteten Pfeile ein positives und die aufwärts gerichteten Pfeile ein negatives Vorzeichen.
3. Die einzelnen Komponenten werden subtrahiert – fertig!

$$\begin{array}{cc} \cancel{a_1} & \cancel{b_1} \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \cancel{a_3} & \cancel{b_3} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Anmerkung: Der Betrag des senkrecht stehenden Vektors entspricht genau der Flächenmaßzahl des Parallelogramms, das von den beiden Vektoren aufgespannt wird.

Beispiel: Sind $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, ergibt sich für den gesuchten Vektor:

$$\begin{array}{cc} \cancel{1} & \cancel{-1} \\ 3 & 4 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 3 & 4 \\ \cancel{2} & \cancel{0} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cc} 3 & 4 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3\cdot 0 & - & 2\cdot 4 \\ 2\cdot(-1) & - & 1\cdot 0 \\ 1\cdot 4 & - & 3\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

# 1 Abitur 2021

## Prüfungsteil 1

### 1 Analysis

1.1 Das angegebene Integral erhalten Sie mithilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{F}(x)\Big]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$, wobei F eine Stammfunktion von $f$ ist. Beachten Sie, dass der Wert des Integrals dem orientierten Flächeninhalt der Fläche zwischen dem Graphen von $f$ und der $x$-Achse im Intervall $[a\,;b]$ entspricht. Betrachten Sie die Flächeninhalte unterhalb und oberhalb der $x$-Achse.

1.2 Beachten Sie, dass der Graph von $f$ punktsymmetrisch zum Ursprung ist und somit die Flächeninhalte oberhalb und unterhalb der $x$-Achse im Intervall $[-a\,;a]$ jeweils gleich groß sind.

### 2 Lineare Algebra / Analytische Geometrie

2.1 Um zu zeigen, dass das Dreieck im Punkt C einen rechten Winkel hat, berechnen Sie das Skalarprodukt der Verbindungsvektoren, die den Winkel bei C einschließen. Falls das Skalarprodukt der beiden Vektoren Null ergibt, stehen sie senkrecht aufeinander.

2.2 Den Flächeninhalt der Dreiecksfläche erhalten Sie mit der Formel $\mathrm{A}_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$. Als Grundseite $g$ wählen Sie die Strecke $\overline{\mathrm{CA}}$, als zugehörige Höhe $h$ die Strecke $\overline{\mathrm{CB}}$. Dazu berechnen Sie die Beträge der entsprechenden Verbindungsvektoren.

### 3 Stochastik

3.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, bei einem Zug eine Kugel, die mit einer geraden Zahl beschriftet ist, zu ziehen. Bezeichnen Sie mit $g$: gerade Zahl und mit $\overline{g}$: ungerade Zahl, und zeichnen Sie ein Baumdiagramm. Damit erhalten Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A mithilfe der Pfadregeln.

3.2 Beachten Sie, dass sich die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Zug ändern, da ohne Zurücklegen gezogen wird. Bezeichnen Sie mit $w$: weiße Kugel und mit $\overline{w}$: schwarze Kugel, und zeichnen Sie ein Baumdiagramm. Damit erhalten Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B ebenfalls mithilfe der Pfadregeln.

### 4 Analysis

4.1 Um nachzuweisen, dass die Tangente $t$ an $\mathrm{G}_f$ an der Stelle $x_1 = 0$ die Steigung $-2$ hat, verwenden Sie die 1. Ableitung von $f$, die Sie mit der Kettenregel bestimmen. Die Steigung $m$ der Tangente $t$ erhalten Sie, indem Sie $x = 0$ in $f'(x)$ einsetzen.

4.2 Um den Flächeninhalt A des Dreiecks, das diese Tangente mit den Koordinatenachsen einschließt, zu erhalten, berechnen Sie zunächst den Schnittpunkt der Tangente mit der y-Achse. Hierfür setzen Sie $x_1 = 0$ in $f(x)$ ein. Um den Schnittpunkt der Tangente mit der $x$-Achse zu erhalten, berechnen Sie zunächst die Tangentengleichung mit der Formel $y = mx + c$. Den Schnittpunkt N der Tangente mit der $x$-Achse erhalten Sie, indem Sie die Gleichung $y = 0$ nach x auflösen. Den Flächeninhalt des Dreiecks erhalten Sie mit der

Formel $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$. Bestimmen Sie dazu die Länge der Grundseite $g$ und die Höhe $h$ des Dreiecks.

**5 Lineare Algebra / Analytische Geometrie**

5.1 Prüfen Sie, ob die Richtungsvektoren von $g$ und $h$ Vielfache voneinander sind. Falls sie nicht Vielfache voneinander sind, setzen Sie die Gleichungen der Geraden $g$ und $h$ gleich und lösen das zugehörige lineare Gleichungssystem. Bei einer eindeutigen Lösung schneiden sich $g$ und $h$.

5.2 Überlegen Sie, wie der Normalenvektor $\vec{n}$ von E lauten muss, sodass E orthogonal zu g ist. Setzen Sie $\vec{n}$ und die Koordinaten von P in die allgemeine Form einer Koordinatengleichung E: $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + k = 0$ ein und bestimmen Sie $k$.

**6 Stochastik**

6.1 Untersuchen Sie die Abbildungen bezüglich der Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten, welche 1 ergeben muss, und vergleichen Sie den Erwartungswert $\mathrm{E(X)} = \mathrm{n} \cdot \mathrm{p}$ von X mit den Erwartungswerten der Abbildungen, die jeweils beim Maximum abzulesen sind.

6.2 Setzen Sie die Werte des gegebenen Terms in $\mathrm{P_p^n(X = k)} = \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{k}} \cdot \mathrm{p^k} \cdot (1-\mathrm{p})^{\mathrm{n-k}}$ (Bernoulli-Formel) einer binomialverteilten Zufallsgröße X ein und bestimmen Sie damit die Werte für a, b und c.

**7 Analysis**

7.1 Die Nullstellen von $f_a$ erhalten Sie, indem Sie die Gleichung $f_a(x) = 0$ nach $x$ auflösen. Klammern Sie dazu $x^4$ aus und verwenden Sie den Satz vom Nullprodukt. Die Lösung der quadratischen Gleichung erhalten Sie durch Wurzelziehen. Überlegen Sie, für welche Werte von $a$ der Radikand (Ausdruck unter der Wurzel) positiv ist.

7.2 Die Extremstellen von $f_a$ erhalten Sie mithilfe der 1. und 2. Ableitung von $f_a$, die Sie mit der Potenzregel bestimmen. Setzen Sie $x = 1$ in die notwendige Bedingung ${f_a}'(x) = 0$ ein und lösen Sie die Gleichung nach $a$ auf. Setzen Sie den erhaltenen $a$-Wert und $x = 1$ in ${f_a}''(x)$ ein; falls das Ergebnis größer als Null ist, liegt ein Minimum vor.

**8 Lineare Algebra / Analytische Geometrie**

8.1 Begründen Sie, dass der Punkt P in der $x_1x_2$-Ebene liegt. Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunkts $M^*$ der Grundfläche. Berechnen Sie den Abstand von P zu $M^*$, indem Sie den Betrag des entsprechenden Verbindungsvektors berechnen. Falls $\left|\overrightarrow{PM^*}\right| = r$, liegt P auf dem Rand der Grundfläche des Zylinders.

8.2 Fertigen Sie eine Skizze der Problemstellung an. Beachten Sie, dass der Punkt S genau senkrecht oberhalb des Punktes P liegt. Die Koordinaten des Punktes T, der von P den größten Abstand hat, erhalten Sie mithilfe einer Vektorkette.

**9 Stochastik**

9.1 Überlegen Sie, wie viele Kinder insgesamt eine Brille tragen und teilen Sie diese Anzahl durch die Gesamtzahl der Kinder, um den gesuchten Anteil zu bestimmen.

# 1 Abitur 2021

## Prüfungsteil 1

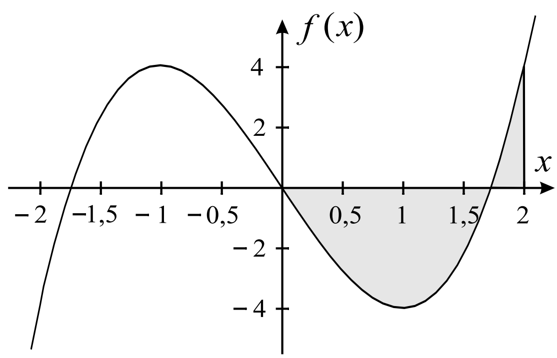
**1 Analysis**

Es ist $f(x) = 2x^3 - 6x$.

1.1 Das angegebene Integral erhält man mithilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung:

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x &= \int_0^2 \left(2x^3 - 6x\right)\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{2}{4}x^4 - \frac{6}{2}x^2\right]_0^2 \\ &= \left[\frac{1}{2}x^4 - 3x^2\right]_0^2 \\ &= \frac{1}{2}\cdot 2^4 - 3\cdot 2^2 - \left(\frac{1}{2}\cdot 0^4 - 3\cdot 0^2\right) \\ &= 8 - 12 - 0 \\ &= -4\end{aligned}$$

Der Wert des Integrals entspricht dem orientierten Flächeninhalt der Fläche zwischen dem Graphen von $f$ und der $x$-Achse im Intervall $[0;2]$. Da der Flächeninhalt unterhalb der $x$-Achse größer ist als der Flächeninhalt oberhalb der $x$-Achse und der Flächeninhalt unterhalb der $x$-Achse negativ orientiert ist, ist die Flächenbilanz insgesamt negativ orientiert.




1.2 Da alle Exponenten von $f$ ungerade sind, ist der Graph von $f$ punktsymmetrisch zum Ursprung. Somit sind die Flächeninhalte oberhalb und unterhalb der $x$-Achse im Intervall $[-a;a]$ jeweils gleich groß, so dass der orientierte Flächeninhalt insgesamt Null ergibt. Damit gilt:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = 0$$

## 2 Lineare Algebra / Analytische Geometrie

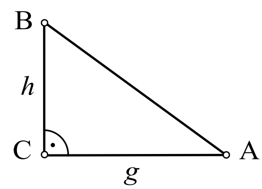
Das Dreieck ABC hat die Eckpunkte A$(2 \mid 3 \mid -4)$, B$(-1 \mid 1 \mid 0)$ und C$(2 \mid 1 \mid -4)$.

2.1 Um zu zeigen, dass das Dreieck im Punkt C einen rechten Winkel hat, berechnet man das Skalarprodukt der Verbindungsvektoren, die den Winkel bei C einschließen:

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}} \circ \overrightarrow{\mathrm{CB}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \cdot (-3) + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 4 = 0$$

Da das Skalarprodukt der beiden Vektoren Null ergibt, stehen sie senkrecht aufeinander. Somit hat das Dreieck ABC bei C einen rechten Winkel.

2.2 Den Flächeninhalt $\mathrm{A}_{\mathrm{Dreieck}}$ der Dreiecksfläche erhält man mit der Formel $\mathrm{A}_{\mathrm{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$.
Als Grundseite $g$ wählt man die Strecke $\overline{\mathrm{CA}}$ , als zugehörige Höhe $h$ die Strecke $\overline{\mathrm{CB}}$. Dazu berechnet man die Beträge der entsprechenden Verbindungsvektoren:




$$g = \overline{\mathrm{CA}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$h = \overline{\mathrm{CB}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right| = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

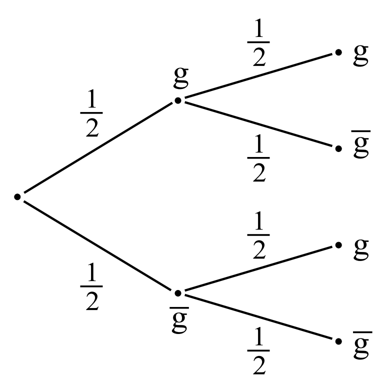
Damit gilt:

$$\mathrm{A}_{\mathrm{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 = 5$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC beträgt 5 FE.

## 3 Stochastik

3.1 Die Wahrscheinlichkeit, bei einem Zug eine Kugel, die mit einer geraden Zahl beschriftet ist, zu ziehen, beträgt $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Die Wahrscheinlichkeit, bei einem Zug eine Kugel, die mit einer ungeraden Zahl beschriftet ist, zu ziehen, beträgt ebenfalls $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Bezeichnet man mit $g$: gerade Zahl und mit $\overline{g}$: ungerade Zahl, so ergibt sich nebenstehendes Baumdiagramm:



Damit erhält man die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A: «Mindestens eine Kugel ist mit einer geraden Zahl beschriftet.» mithilfe der Pfadregeln:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{g}\,\overline{\mathrm{g}}) + \mathrm{P}(\overline{\mathrm{g}}\,\mathrm{g}) + \mathrm{P}(\mathrm{g}\,\mathrm{g}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

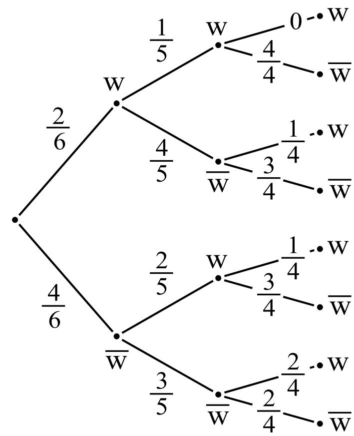
Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A beträgt $\frac{3}{4}$.
Alternativ kann man mit dem Gegenereignis $\overline{\mathrm{A}}$ «Es ist keine Kugel mit einer geraden Zahl beschriftet» rechnen:

$$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) = \mathrm{P}(\overline{\mathrm{g}}\,\overline{\mathrm{g}}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Damit ergibt sich wie oben:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 1 - \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) = \frac{3}{4}$$

3.2 Da dreimal hintereinander ohne Zurückzulegen gezogen wird, ändern sich die Wahrscheinlichkeiten bei jedem Zug.
Bezeichnet man mit $w$: weiße Kugel und mit $\overline{w}$: schwarze Kugel, so erhält man nebenstehendes Baumdiagramm:
Damit erhält man die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B: «Unter den gezogenen Kugeln ist genau eine weiße Kugel» mithilfe der Pfadregeln:




$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{B}) &= \mathrm{P}(w\overline{w}\,\overline{w}) + \mathrm{P}(\overline{w}w\overline{w}) + \mathrm{P}(\overline{w}\,\overline{w}w)\\
&= \frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4} + \frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} + \frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\\
&= \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\\
&= \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B beträgt $\frac{3}{5}$.

**4 Analysis**

Es ist $f(x) = e^{-2x} + 1$.

4.1 Um nachzuweisen, dass die Tangente $t$ an $\mathrm{G}_f$ an der Stelle $x_1 = 0$ die Steigung $-2$ hat, verwendet man die 1. Ableitung von $f$, die man mit der Kettenregel bestimmt:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= e^{-2x}\cdot(-2)\\
f'(x) &= -2e^{-2x}
\end{aligned}$$

Die Steigung $m$ der Tangente $t$ erhält man, indem man $x_1 = 0$ in $f'(x)$ einsetzt:

$$m = f'(0) = -2e^{-2\cdot 0}$$
$$m = f'(0) = -2$$

Somit hat die Tangente $t$ die Steigung $-2$.

4.2 Um den Flächeninhalt A des Dreiecks, das die Tangente $t$ mit den Koordinatenachsen einschließt, zu erhalten, berechnet man zunächst den Schnittpunkt S der Tangente mit der $y$-Achse. Hierfür setzt man $x_1 = 0$ in $f(x)$ ein.

$$y = f(0) = e^{-2\cdot 0} + 1 = 2 \Rightarrow \mathrm{S}(0 \mid 2)$$

Um den Schnittpunkt der Tangente $t$ mit der $x$-Achse zu erhalten, berechnet man zunächst die Tangentengleichung mit der Formel $y = mx + c$. Die Tangente hat die Steigung $m = -2$ und geht durch den Punkt $\mathrm{S}(0 \mid 2)$. Diese Werte setzt man in die Tangentenformel ein:

$$2 = -2 \cdot 0 + c$$
$$2 = c$$

Setzt man $c = 2$ in die Tangentenformel ein, ergibt sich die Tangentengleichung:

$$y = -2x + 2$$

Den Schnittpunkt N der Tangente mit der $x$-Achse erhält man, indem man die Gleichung $y = 0$ nach $x$ auflöst:

$$0 = -2x + 2$$
$$-2 = -2x$$
$$1 = x$$

Den Flächeninhalt des Dreiecks erhält man mit der Formel $\mathrm{A} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$. Die Dreiecksseite vom Ursprung zu N entspricht der Seite $g$ und beträgt $g = 1$. Die Dreiecksseite vom Ursprung zu S entspricht der Höhe $h$ mit $h = 2$. Diese Werte setzt man in die Flächeninhaltsformel des Dreiecks ein:

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$$
$$\mathrm{A} = 1$$

Somit beträgt der Flächeninhalt des Dreiecks 1 FE.

## 5 Lineare Algebra / Analytische Geometrie

5.1 Die Richtungsvektoren der Geraden sind keine Vielfachen voneinander, da es kein $k$ gibt, sodass gilt $k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Somit sind die Geraden weder identisch noch (echt) parallel. Gleichsetzten der Geradengleichungen führt zu:

$$\begin{array}{lcccccccc} \text{I} & 3 & + & 2\lambda & = & 1 & - & 2\mu \\ \text{II} & -1 & + & 4\lambda & = & 4 & - & \mu \\ \text{III} & 2 & - & 3\lambda & = & 5 & + & 3\mu \end{array}$$

Gleichung I $-$ 2·Gleichung II ergibt $5-6\lambda=-7 \;\Rightarrow\; \lambda=2$.
Setzt man $\lambda=2$ in Gleichung I ein, erhält man: $3+4=1-2\mu \;\Rightarrow\; \mu=-3$.
Setzt man $\lambda=2$ und $\mu=-3$ in Gleichung III ein, ergibt sich:

$$2-3\cdot 2=5+3\cdot(-3) \;\Leftrightarrow\; -4=-4$$

Aufgrund der wahren Aussage schneiden sich $g$ und $h$.

5.2 Da die Ebene E orthogonal zur Geraden $g$ ist, ist ein Normalenvektor von E der Richtungsvektor von $g$: $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\4\\-3\end{pmatrix}$. Setzt man $\vec{n}$ in die allgemeine Form einer Koordinatengleichung ein, ergibt sich $\mathrm{E}:\; 2x+4y-3z+k=0$ . Um $k$ zu bestimmen, setzt man die Koordinaten des gegebenen Punktes $\mathrm{P}(5 \mid 7 \mid 3)$ in E ein:

$$2\cdot 5+4\cdot 7-3\cdot 3+k=0 \;\Rightarrow\; k=-29$$

Somit lautet die Koordinatengleichung: $\mathrm{E}:\; 2x+4y-3z-29=0$.

## 6 Stochastik

Es ist X binomialverteilt mit $\mathrm{n}=20$ und $\mathrm{p}=0,4$.

6.1 Die Abbildung C zeigt keine Wahrscheinlichkeitsverteilung von X, da die Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten größer als 1 ist.
Das Maximum einer binomialverteilten Wahrscheinlichkeitsverteilung liegt beim Erwartungswert von X.
Den Erwartungswert von X erhält man mit der Formel $\mathrm{E(x)}=\mathrm{n}\cdot\mathrm{p}$:

$$\mathrm{E(x)}=\mathrm{n}\cdot\mathrm{p}=20\cdot 0,4=8$$

Das Maximum liegt in Abbildung A bei $\mathrm{X}=9$, in Abbildung B bei $\mathrm{X}=8$.
Somit stellt Abbildung B die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X dar.

6.2 Allgemein lautet die Bernoulli-Formel einer binomialverteilten Zufallsgröße X:

$$\mathrm{P}_{\mathrm{p}}^{\mathrm{n}}(\mathrm{X}=\mathrm{k})=\binom{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}\cdot\mathrm{p}^{\mathrm{k}}\cdot(1-\mathrm{p})^{\mathrm{n}-\mathrm{k}}$$

Also ist

$$P_{0,4}^{20}(X = a) = \binom{20}{a} \cdot 0{,}4^{13} \cdot b^c$$

gegeben. Durch Vergleich der Koeffizienten ergibt sich:

- Mit $k = 13$ und $a = k$ gilt: $a = 13$, $b = 1 - p = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$.
- Mit $n = 20$ gilt: $c = n - k = 20 - 13 = 7$.

Somit ist $a = 13$, $b = 0{,}6$ und $c = 7$.

**7 Analysis**

Es ist $f_a(x) = a \cdot x^6 - x^4$ ; $x \in \mathbb{R}$ ; $a \in \mathbb{R}$ ; $a \neq 0$.

7.1 Die Nullstellen von $f_a$ erhält man durch Lösen der Gleichung $f_a(x) = 0$:

$$\begin{aligned} a \cdot x^6 - x^4 &= 0 \\ x^4 \cdot \left(a \cdot x^2 - 1\right) &= 0 \end{aligned}$$

Mithilfe des Satzes vom Nullprodukt erhält man als erste Lösung $x_1 = 0$.
Die Gleichung $a \cdot x^2 - 1 = 0$ löst man durch Wurzelziehen: $x_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{1}{a}}$.
Es gibt aber nur weitere Lösungen, wenn der Radikand (Ausdruck unter der Wurzel) positiv ist. Dies ist nur für $a > 0$ der Fall.
Somit hat $f_a$ für $a > 0$ mehr als eine Nullstelle.

7.2 Die Extremstellen von $f_a$ erhält man mithilfe der 1. und 2. Ableitung von $f_a$, die man mit der Potenzregel bestimmt:

$$\begin{aligned} {f_a}'(x) &= 6 \cdot a \cdot x^5 - 4 \cdot x^3 \\ {f_a}''(x) &= 30 \cdot a \cdot x^4 - 12 \cdot x^2 \end{aligned}$$

Mit der notwendigen Bedingung ${f_a}'(x) = 0$ für ein Minimum gilt an der Stelle $x = 1$:

$$\begin{aligned} {f_a}'(1) &= 0 \\ 6 \cdot a \cdot 1^5 - 4 \cdot 1^3 &= 0 \\ 6 \cdot a - 4 &= 0 \\ a &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Setzt man $x = 1$ und $a = \frac{2}{3}$ in ${f_a}''(x)$ ein, erhält man:

$$f_{\frac{2}{3}}''(1) = 30 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1^4 - 12 \cdot 1^2 = 8 > 0 \;\Rightarrow\; \text{Minimum}$$

Somit hat $f_a$ an der Stelle $x = 1$ für $a = \frac{2}{3}$ ein Minimum.

# Stichwortverzeichnis